

**Untersuchungen zur intuitionistischen Typentheorie :
Realisierbarkeit und Beziehung zu verwandten
Theorien**

DISSERTATION
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
des Fachbereichs Mathematik
der Ludwig-Maximilian-Universität
München

Werner Pohlmann
München

25. Mai 1977



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555625_0094

**Untersuchungen zur intuitionistischen Typentheorie :
Realisierbarkeit und Beziehung zu verwandten
Theorien**

DISSERTATION
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
des Fachbereichs Mathematik
der Ludwig-Maximilian-Universität
München

Werner Pohlmann
München

25. Mai 1977



1. Berichterstatter: WR u. Prof. Osswald

2. Berichterstatter: Prof. Schütte

Tag der mündlichen Prüfung: 2.Aug.1977

INHALT

ÜBERSICHT	2
KAPITEL I	5
§1 Die intuitionistische Typentheorie T	5
§2 Die klassische Typentheorie	11
§3 Elimination der Extensionalität	14
KAPITEL II	20
Ein Realisierbarkeitsbegriff für T	
§1 R-Modelle	21
§2 Ein R-Modell für T	28
§3 Zur Typentheorie mit Extensionalität	32
§4 Zur Charakterisierung der ED, DP-Eigenschaft	39
KAPITEL III	48
§1 Myhill's intuitionistische ZF-Mengenlehre Z	48
§2 Rekursive Definition und Einbettung der Zahlentheorie in Z	53
§3 Eine Darstellung der intuitionistischen Typentheorie in Z	57
§4 Vorbereitende Definitionen für den Konsistenzsatz	62
§5 Beweis der Konsistenz von T in Z	70
LITERATURVERZEICHNIS	77

ÜBERSICHT

Den Untersuchungsgegenstand dieser Arbeit bildet die intuitionistische Typentheorie T (mit vollständiger Induktion) sowie ihre Erweiterung $T+(EA)$ um das Extensionalitätsaxiom. Für diese Theorien wird hier ein Realisierbarkeitsbegriff entwickelt, und es wird ihr Verhältnis zu verschiedenen verwandten Systemen analysiert.-

Die Widerspruchsfreiheit von T resp. $T+(EA)$ schließt, wie im ersten Kapitel ausgeführt wird, die Konsistenz ihrer klassischen Analoga jeweils ein. Für den Nachweis wird eine Übersetzung klassischer Formeln in intuitionistisch stabile Formeln benutzt sowie eine Relativierung auf einen extensionalen Gegenstandsreich, womit das Extensionalitätsaxiom eliminiert werden kann.

Der Hauptteil dieser Arbeit behandelt dann die Realisierbarkeit von Formeln der Typentheorie und ihre Konsequenzen (Realisierbarkeit im Sinne der Kleene'schen $\Vdash$ -Relation im Unterschied zur Anwendung rekursiver Funktionen, die für ähnliche Zwecke ebenfalls von Kleene initiiert wurde). Erklärt wird, wann eine geschlossene Formel A durch einen Kontext Γ , gegeben durch eine Menge von Formeln, realisiert wird. Diese Relation $\Vdash \in RA$ stellt eine Interpretation der Theorie T dar, die ihrer Besonderheit gegenüber der klassischen Variante Rechnung trägt und einige Eigenschaften nachweist, die dem informellen Schließen geläufig sind. Aus $\Vdash \in RA \vee B$ folgt, daß A oder B aus Γ herleitbar ist, und $\Vdash \in R \exists x F[x]$ impliziert die Existenz eines Terms t , sodaß Γ die Formel $F[t]$ herleitet. Über diese Relation R erhält man so zunächst für T selbst die Exis-

tenz- und Oder-Eigenschaft und hat zugleich die Möglichkeit geschaffen, ihre Gültigkeit für Erweiterungen der Typentheorie zu studieren, d.h. man betrachtet Kontextmengen Γ , die durch zusätzliche Axiome gegeben sind. Existenz- und Oder-Eigenschaft übertragen sich so auf die extensionale Variante $T+(EA)$.— Untersuchungen dieser Art werfen für die Typentheorie das spezifische Problem auf, zusammengesetzte Terme durch ein Verfahren zu interpretieren, das zugleich ihre Komplexität reduziert. Zu diesem Zweck müssen sogenannte Berechnungsprädikate eingeführt werden, d.h. man beginnt mit einer Prädikatzuordnung zu komplexen Termen, die eine mögliche Interpretation im angestrebten Sinn darstellt. Dieser Grundgedanke ist verschiedentlich ausgenutzt worden; die in dieser Arbeit verwendete Fassung unterscheidet sich von den vorliegenden hauptsächlich dadurch, daß solche Prädikate in Relation zu gewissen Formelmengen als dem Kontext der Realisierung definiert werden.

Auf diese Weise läßt sich dann insbesondere auch die Umkehrung des o.a. Resultats beweisen: Formeln resp. Formelmengen, die als weitere nicht logische Axiome zu T genommen werden und die Existenz- und Oder-Eigenschaft konservieren, werden durch die Relation R charakterisiert. Diese Umkehrung ist nicht zuletzt deshalb von Interesse, als eine einfachere syntaktische Charakterisierung dieser Formeln nicht bekannt ist, insbesondere reichen die von Harrop gestellten Bedingungen für diesen Zweck nicht aus.

Die Darstellung dieser Ergebnisse vollzieht sich in zwei Schritten. Zunächst wird der Begriff eines R -Modells eingeführt, in dem alle nötigen Bedingungen für die Relation R festgehalten sind, und sodann werden spezifisch geeignete R -Modelle untersucht, also

Prädikatszuordnungen mit besonderen Abschließungsbedingungen, wie man sie etwa zum Beweis der Umkehrung braucht.

In einem dritten Kapitel wird schließlich das Verhältnis der intuitionistischen Typentheorie zu einer von Myhill vorgeschlagenen intuitionistischen ZF-Mengenlehre untersucht, bei der, um den intuitionistischen Charakter zu wahren, das Regularitätsaxiom durch die ϵ -Induktion ersetzt werden muß. Dabei wird T entsprechend seiner Typenstruktur in einer Hierarchie von Potenzmengen über ω interpretiert, und mittels einer Arithmetisierung des Formelbegriffs ergibt sich der formelle Nachweis der Konsistenz von T+(EA) in Z. Damit läßt sich dann auch die Widerspruchsfreiheit der klassischen Typentheorie in Z beweisen. Darüberhinaus enthält dieses Kapitel eine weitere Charakterisierung der Stärke des Systems Z selbst. Die Widerspruchsfreiheit der klassischen ZF-Mengenlehre folgt aus der Widerspruchsfreiheit von Z zusammen mit dem Schema $\forall x \neg \neg \varphi(x) \rightarrow \neg \neg \forall x \varphi(x)$. —

Ich danke Herrn Professor Osswald für die Anregung zu dieser Arbeit und für seine Beratung während der Durchführung.

Werner Pohlmann

KAPITEL I

§1 Die intuitionistische Typentheorie

1.1 Typen

- 1) o ist ein Typ
- 2) Ist τ ein Typ, so auch (τ) .

1.2 Grundzeichen

- 1) Zu jedem Typ τ gibt es abzählbar unendlich viele freie und gebundene Variablen
($a^\tau, b^\tau \dots \text{resp. } x^\tau, y^\tau \dots$)
- 2) Es gibt die Konstante 0 vom Typ o , das einstellige Funktionszeichen S mit Wert und Argument vom Typ o und das zweistellige Prädikatszeichen $=$ für den Grundtyp.
- 3) Es gibt die Symbole $\wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists, \lambda, \varepsilon, \perp$.
- 4) Es gibt die üblichen Hilfszeichen.

1.3 Nennformen

Eine Nennform ist eine nichtleere Zeichenreihe, in der außer den Grundzeichen höchstens noch Symbole $*_1, \dots, *_n$ auftreten. Ist F eine Nennform, so bezeichne $F[u_1, \dots, u_n]$ die Zeichenreihe, die aus dem Ersatz der Nennzeichen $*_i$ in F durch die nichtleeren Zeichenreihen u_i hervorgeht.

1.4 Ausdrücke

- 1) 0 ist ein Typ vom Term o . $\perp$ ist eine Formel.
- 2) Jede freie Variable vom Typ τ ist ein Term vom Typ τ .
- 3) Ist t ein Term vom Typ o , so auch St .
- 4) Sind s, t Terme vom Typ o , so ist $s=t$ eine Formel.

- 5) Ist s ein Term vom Typ τ , t ein Term vom Typ (τ) , so ist set eine Formel.
- 6) Sind A, B Formeln, so auch $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$.
- 7) Ist F eine einstellige Nennform, a^τ eine freie Variable, $F[a^\tau]$ eine Formel und x^τ eine gebundene Variable, die nicht in $F[a^\tau]$ auftritt, so sind $\forall x^\tau F[x^\tau]$ und $\exists x^\tau F[x^\tau]$ Formeln, und $\lambda x^\tau F[x^\tau]$ ist ein Term vom Typ (τ) .

Schreibweise: Wie bereits benutzt stehen große Buchstaben für Formeln, kleine für Terme, die, soweit nötig, mit ihren Typen indiziert werden. Große griechische Buchstaben bezeichnen endliche Mengen von Formeln. Ist $\Gamma = \{A_1, \dots, A_n\}$, so sei $\Gamma \rightarrow A$ die Abkürzung für $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \dots (A_n \rightarrow A) \dots)$. Für Formeln A, B bezeichne $\neg A$ die Formel $A \rightarrow \perp$, $A \leftrightarrow B$ die Formel $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$. $\forall xy F[x, y]$ sei $\forall x \forall y F[x, y]$.

Ich benutze die üblichen Regeln zur Klammerersparnis, etwa $A \rightarrow B \rightarrow C$ für $A \rightarrow (B \rightarrow C)$.

Ist Z eine Zeichenreihe, so sei $V(Z)$ die Menge der freien Variablen.

1.5 Der Kalkül T

Es gibt die folgenden Axiome und Grundschlüsse (für Formeln nach 1.4):

- 1) $A \rightarrow A$
- 2) $\Gamma \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$: $\Gamma \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C$
- 3) $A \rightarrow A \rightarrow C$: $A \rightarrow C$
- 4) C : $A \rightarrow C$
- 5) $\Gamma \rightarrow A, B \rightarrow C$: $\Gamma \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow C$
- 6) $\Gamma \rightarrow A, A \rightarrow B$: $\Gamma \rightarrow B$
- 7) $\Gamma \rightarrow A, \Gamma \rightarrow B$: $\Gamma \rightarrow A \wedge B$
- 8) $A \rightarrow B$: $A \wedge C \rightarrow B, C \wedge A \rightarrow B$
- 9) $\Gamma \rightarrow A$: $\Gamma \rightarrow A \vee B, \Gamma \rightarrow B \vee A$
- 10) $A \rightarrow C, B \rightarrow C$: $A \vee B \rightarrow C$

- 11) $\Gamma \rightarrow F[a^T] : \Gamma \rightarrow \forall x^T F[x^T] - a^T \notin V(\Gamma, F[x])$
- 12) $F[t^T] \rightarrow C : \forall x^T F[x^T] \rightarrow C$
- 13) $\Gamma \rightarrow F[t^T] : \Gamma \rightarrow \exists x^T F[x^T]$
- 14) $F[a^T] \rightarrow C : \exists x^T F[x^T] \rightarrow C - a^T \notin V(F[x^T], C)$
- 15) $\Gamma \rightarrow F[t^T] : \Gamma \rightarrow t^T \varepsilon \lambda x^T F[x^T]$
- 16) $F[t^T] \rightarrow C : t^T \varepsilon \lambda x^T F[x^T] \rightarrow C$
- 17) $\perp \rightarrow A$
- 18) $\forall x^O (x^O = x^O)$
- 19) $\forall x^O y^O z^O (x^O = y^O \rightarrow z^O = y^O \rightarrow x^O = z^O)$
- 20) $\forall x^O y^O (x^O = y^O \rightarrow Sx^O = Sy^O)$
- 21) $\forall x^O y^O (Sx^O = Sy^O \rightarrow x^O = y^O)$
- 22) $\forall x^O (Sx^O = x^O \rightarrow \perp)$
- 23) $F[0], \forall x^O (F[x^O] \rightarrow F[Sx^O]) : \forall x^O F[x^O]$

Die Herleitbarkeit ist in der üblichen Weise erklärt und wird mit $\vdash$ bezeichnet.

1.6 Satz über einige herleitbare Formeln.

- 1) $A \rightarrow B \rightarrow A$
- 2) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- 3) $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C)$
- 4) $(A \wedge B \rightarrow C) \leftrightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$
- 5) $\forall x (A \rightarrow F[x]) \leftrightarrow (A \rightarrow \forall x F[x])$

Beweis:

- 1) 1.5.1, 4, 2
- 2) " $\rightarrow$ " aus $(B \rightarrow C) \rightarrow B \rightarrow C$ und $A \rightarrow A$ mit 1.5.5 und 1.5.3
" $\leftarrow$ " mit $B \rightarrow (A \rightarrow B)$ aus $(A \rightarrow C) \rightarrow A \rightarrow C$ durch 1.5.5 und 1.5.2
- 3) aus $B \rightarrow (A \rightarrow B)$ und $C \rightarrow C$ mit 1.5.5, 1.5.2
- 4) " $\rightarrow$ " $A \rightarrow B \rightarrow A \wedge B$ aus 1.6.1 mit 1.5.7, sodaß aus $C \rightarrow C$ mit 1.5.5 und 1.5.2 die Behauptung folgt.
" $\leftarrow$ " Aus $A \rightarrow B \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow C$ folgt mit 1.5.8 und 1.5.3 das Ergebnis.
- 5) für eine Variable $a \notin V(F, A)$ folgt aus $(A \rightarrow F[a]) \rightarrow A \rightarrow F[a]$ die " $\rightarrow$ " Behauptung mit 1.5.12 und 1.5.11. Für die Umkehrung ist von $\forall x F[x] \rightarrow F[a]$ auszugehen und mit 1.5.5 und 1.5.11 weiterzuschließen.

Folgerung: Wendet man die Induktionsregel 1.5.23 auf die Formel $F[0] \rightarrow \forall x^0 (F[x^0] \rightarrow F[Sx^0]) \rightarrow F[a^0]$ an, so ergibt sich mit 1.6.2, 1.6.5 das übliche Induktionsaxiom. Des weiteren ist das Deduktionstheorem gültig.

1.7 Zur Definierbarkeit von logischen Zeichen.

Bekanntlich lassen sich einige der angegebenen Grundzeichen und die zu ihnen gehörigen Regeln durch Definitionen eliminieren. Von der so möglichen technischen Ersparnis werde ich bei einer späteren Gelegenheit Gebrauch machen.

D. Prawitz hat in seinem Buch "Natural Deduction" gezeigt, daß schon in der intuitionistischen Logik der 2. Stufe $\wedge, \vee, \exists$ durch $\rightarrow, \forall$ definierbar sind. Die dort benutzte Quantifizierung über Prädikate wird hier ersetzt durch eine Quantifizierung über den Typ (o) , die wegen $A \leftrightarrow O \varepsilon \lambda x^0 A$ alle Formeln einbezieht.

Setzt man:

- 1) $A \wedge B$:= $\forall x^{(o)} ((A \rightarrow (B \rightarrow O \varepsilon x^{(o)})) \rightarrow O \varepsilon x^{(o)})$
- 2) $A \vee B$:= $\forall x^{(o)} ((A \rightarrow O \varepsilon x^{(o)}) \rightarrow (B \rightarrow O \varepsilon x^{(o)}) \rightarrow O \varepsilon x^{(o)})$
- 3) $\exists y F[y]$:= $\forall x^{(o)} (\forall y (F[y] \rightarrow O \varepsilon x^{(o)}) \rightarrow O \varepsilon x^{(o)})$,

dann sind die Schlüsse 1.5.7, 8, 9, 10, 13, 14 direkt herleitbar mit den verbleibenden logischen Axiomen und Regeln.

Wegen der in T enthaltenen Arithmetik ist die Disjunktion auch folgendermaßen definierbar:

- 4) $A \vee B$:= $\exists x^0 ((x=0 \rightarrow A) \wedge (\neg x=0 \rightarrow B))$,

und die Schlüsse 1.5.9, 10 sind direkt herleitbar im vereinfachten System.

Beweis: Ich beschränke mich auf zwei Beispiele.

Zur Definition 1.7.3:

I Zur Äquivalenz der beiden angegebenen Formeln:

" $\rightarrow$ " $F[a^T] \rightarrow \forall y^T (F[y^T] \rightarrow O\epsilon b^{(o)}) \rightarrow O\epsilon b^{(o)}$ 1.5.1, 2, 12
 $\exists y^T F[y^T] \rightarrow \forall y^T (F[y^T] \rightarrow O\epsilon b^{(o)}) \rightarrow O\epsilon b^{(o)}$ 1.5.14
 sodaß für $b \notin V(F)$ mit 1.5.11 q.e.d..

" $\leftarrow$ " Aus $F[a^T] \rightarrow F[a^T]$ folgt mit 1.5.13, 1.5.15
 $F[a^T] \rightarrow O\epsilon \lambda x^O \exists z^T F[z^T]$
 also $\forall y^T (F[y^T] \rightarrow O\epsilon \lambda x^O \exists z^T F[z^T])$ nach 1.5.12
 Andererseits aus 1.5.1, 1.5.16:
 $O\epsilon \lambda x^O \exists z^T F[z^T] \rightarrow \exists z^T F[z^T]$,
 sodaß aus beiden zusammen mit 1.5.5
 $(\forall y^T (F[y^T] \rightarrow O\epsilon \lambda x^O \exists z^T F[z^T]) \rightarrow O\epsilon \lambda x^O \exists z^T F[z^T]) \rightarrow \exists z^T F[z^T]$
 sodaß q.e.d. mit 1.5.12.

II Zur Herleitbarkeit der Regel 1.5.13:

$\vdash \rightarrow F[t^T]$ ist vorausgesetzt. Wie oben gilt
 $F[t^T] \rightarrow \forall y^T (F[y^T] \rightarrow O\epsilon b^{(o)}) \rightarrow O\epsilon b^{(o)}$ für ein $b \notin V(V, F)$,
 sodaß mit 1.5.6 und 1.5.11 die Behauptung folgt.

III Zur Herleitbarkeit der Regel 1.5.14:

$F[a^T] \rightarrow C$ ist vorausgesetzt, $a^T \notin V(F, C)$.
 Mit 1.5.15, 1.5.11: $\forall y^T (F[y^T] \rightarrow O\epsilon \lambda x^O C)$,
 mit 1.5.16 $O\epsilon \lambda x^O C \rightarrow C$ und nach 1.5.5:
 $(\forall y^T (F[y^T] \rightarrow O\epsilon \lambda x^O C) \rightarrow O\epsilon \lambda x^O C) \rightarrow C$,
 worauf 1.5.12 anwendbar ist, weil $\lambda x^O C$ als Konsequenz der Variablenbedingung ein korrekt gebildeter Term, also unabhängig von $\forall y^T$ ist.

Zur Definition 1.7.4:

I Zur Äquivalenz der beiden angegebenen Formeln:
 $\models \rightarrow$ " Es gilt $A \rightarrow 0=0 \rightarrow A$ und $\neg 0=0 \rightarrow B$ mit 1.5.17, also
 $A \rightarrow (0=0 \rightarrow A) \wedge (\neg 0=0 \rightarrow B)$ und daher $A \rightarrow \exists x((x=0 \rightarrow A) \wedge (x \neq 0 \rightarrow B))$.

Entsprechend erhält man $B \rightarrow (0=0 \rightarrow A) \wedge (\neg 0=0 \rightarrow B)$,
d.h. $B \rightarrow \exists x((x=0 \rightarrow A) \wedge (\neg x=0 \rightarrow B))$ und mit 1.5.10 die
Behauptung.

$\models \leftarrow$ " Für Variable a, b vom Grundtyp gilt:

- i. $a=0 \rightarrow (a=0 \rightarrow A) \wedge (\neg a=0 \rightarrow B) \rightarrow A$
d.h. $a=0 \rightarrow (a=0 \rightarrow A) \wedge (\neg a=0 \rightarrow B) \rightarrow A \vee B$.
- ii. $a=Sb \rightarrow (a=0 \rightarrow A) \wedge (\neg a=0 \rightarrow B) \rightarrow B$,
 $a=Sb \rightarrow (a=0 \rightarrow A) \wedge (\neg a=0 \rightarrow B) \rightarrow A \vee B$,
 $\forall x((a=x \rightarrow (a=0 \rightarrow A) \wedge (\neg a=0 \rightarrow B) \rightarrow A \vee B)$
 $\rightarrow (a=Sx \rightarrow (a=0 \rightarrow A) \wedge (\neg a=0 \rightarrow B) \rightarrow A \vee B))$.

Aus i, ii erhält man durch Induktion und $\forall$ -Elimination

$$a=a \rightarrow (a=0 \rightarrow A) \wedge (\neg a=0 \rightarrow B) \rightarrow A \vee B \text{ und}$$

daraus durch Schnitt mit $a=a$ und $\exists$ -Einführung die
Behauptung.

II Zur Herleitbarkeit der Regeln 1.5.9 und 10:

Aus $\Gamma \rightarrow A$ resp. $\Gamma \rightarrow B$ schließt man wie in $\models \rightarrow$ oben auf
 $\Gamma \rightarrow \exists x((x=0 \rightarrow A) \wedge (\neg x=0 \rightarrow B))$.

Aus $A \rightarrow C$ und $B \rightarrow C$ erhält man wie in $\models \leftarrow$ oben über

$$a=0 \rightarrow (a=0 \rightarrow A) \wedge (\neg a=0 \rightarrow B) \rightarrow C \text{ und}$$

$$a=Sb \rightarrow (a=0 \rightarrow A) \wedge (\neg a=0 \rightarrow B) \rightarrow C$$

das gewünschte Ergebnis.

1.8 Extensionalität

Für Terme r, s vom Typ (τ) sei $r=s$ eine Abkürzung für
 $\forall \epsilon \exists \delta (u \in \tau \wedge (u \in \delta \rightarrow u \in \epsilon))$

Extensionalitätsregel:

$$(ER)^\tau r^\tau = s^\tau, r^\tau \epsilon t^{(\tau)} : s^\tau \epsilon t^{(\tau)}. \text{ (für jeden Typ)}$$

Extensionalitätsaxiom:

$$(EA)^\tau \forall x^\tau y^\tau z^{(\tau)} (x=y \rightarrow x \epsilon z \rightarrow y \epsilon z). \text{ (für jeden Typ)}$$

Die extensionalen Varianten von T werden mit $T+(EA)$
resp. $T+(ER)$ bezeichnet. (ER) ist offensichtlich in
 $T+(EA)$ herleitbar; 1.5.19, 20 werden redundant.

§2 Die klassische Typentheorie T_c

2.1 Die klassische Theorie entsteht aus T durch Hinzunahme aller Formeln $\neg\neg A \rightarrow A$ als Axiome. Das Tertium non datur ist dann herleitbar.

2.2 Elimination von $\vee$ und $\exists$:

Definiert man $A \vee B$ als $\neg A \rightarrow B$

$$\text{und } \exists x^\tau F[x^\tau] \text{ als } \neg \forall x^\tau \neg F[x^\tau],$$

so sind bekanntlich die Regeln bezüglich $\vee$ und $\exists$ aus den übrigen Axiomen und Grundschlüssen direkt herleitbar.

Des weiteren sind die Axiome der Form $\perp \rightarrow A$ aus dem Prinzip des indirekten Beweises $\neg\neg A \rightarrow A$ herleitbar (vgl. 1.6.3) und damit redundant.

Mit T_c soll das so reduzierte, aber immer noch adäquate System der klassischen Typentheorie bezeichnet werden; $\vdash_c$ bezeichne die Herleitbarkeit in T_c . Das Ziel des Paragraphen ist es, die Konsistenz von T_c auf die Konsistenz von T zurückzuführen. Zu diesem Zweck wird eine Übersetzung der Ausdrücke von T_c definiert, die, wie üblich beim Studium klassisch-intuitionistischer Beziehungen, auf der doppelten Negation charakteristischer Formelteile beruht.

2.3 Definition der Übersetzung $\bar{}$:

- 1) Ist t ein Term vom Grundtyp oder eine Variable, so sei $\bar{t} := t$. $\bar{\perp} := \perp$
- 2) $\overline{s^0 = t^0} := \neg\neg s^0 = t^0$; $\overline{s \varepsilon t(\tau)} := \neg\neg \bar{s} \varepsilon \bar{t}(\tau)$.
- 3) $\overline{A \rightarrow B} := \bar{A} \rightarrow \bar{B}$; $\overline{A \wedge B} := \bar{A} \wedge \bar{B}$.
- 4) $\overline{\forall x F[x]} := \forall x \bar{F}[x]$; $\overline{\lambda x F[x]} := \lambda x \bar{F}[x]$.
(Dabei sei $\bar{F}[a]$ dasselbe wie $\bar{F}[\bar{a}]$.)

2.4 Lemma: Ist e ein Ausdruck (Formel, Term vom Typ τ), so auch $\bar{e}$. Ist $F[a^\tau]$ ein Ausdruck und t ein Term vom Typ τ , so sind $\bar{F}[\bar{t}]$ und $\bar{F}[\bar{t}]$ identische Ausdrücke. Der Beweis geschieht durch Induktion nach dem Aufbau von e resp. F und bietet keine Schwierigkeiten.

2.5 Lemma: In T ist herleitbar:

- 1) $A \rightarrow \neg \neg A$
- 2) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
- 3) $\neg \neg \forall x F[x] \rightarrow \neg \neg \forall x \neg \neg F[x]$
- 4) $\neg \neg \exists x F[x] \leftrightarrow \neg \neg \exists x \neg \neg F[x]$
- 5) $\neg \neg \neg A \rightarrow \neg A$
- 6) $\neg \neg (A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow \neg \neg B)$.
- 7) $A \vee \neg A \rightarrow (\neg \neg A \rightarrow A)$

Beweis: 1) mit 1.5.1 und 1.5.5

2) aus $(A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow B$ und $B \rightarrow \neg B \rightarrow \perp$ mit 1.5.6.

3) $\forall x F[x] \rightarrow F[a]$ 1.5.1, 1.5.12

$\neg \neg \forall x F[x] \rightarrow \neg \neg F[a]$ 2.5.2

$\neg \neg \forall x F[x] \rightarrow \forall x \neg \neg F[x]$ 1.5.11

4) $F[t] \leftrightarrow \exists x F[x]$ 1.5.1, 1.5.15, 1.5.16

$\neg \neg F[t] \leftrightarrow \neg \neg \exists x F[x]$ 2.5.2

$\exists x \neg \neg F[x] \leftrightarrow \neg \neg \exists x F[x]$ 1.5.15, 1.5.16

5) aus 2.5.1 und 2.5.2

6) " $\rightarrow$ " $(A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow B$

$A \rightarrow \neg B \rightarrow \neg (A \rightarrow B)$ 1.5.5, 1.5.2

$A \rightarrow \neg \neg (A \rightarrow B) \rightarrow \neg \neg B$ ebenso

" $\leftarrow$ " i. $(A \rightarrow \neg \neg B) \rightarrow (\neg \neg A \rightarrow \neg \neg B)$ 2.5.2, 5.

ii. $\neg (A \rightarrow B) \rightarrow \neg B$ 1.6.3

iii. $A \rightarrow (A \rightarrow \perp) \rightarrow B$

$\neg (A \rightarrow B) \rightarrow \neg \neg A$ 2.5.2

$\neg (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg \neg A \rightarrow \neg \neg B) \rightarrow \neg \neg B$ 1.5.5

Aus der letzten Formel und ii. folgt mit 1.5.6

$\neg (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg \neg A \rightarrow \neg \neg B) \rightarrow \perp$, und daraus mit 1.5.6 aus i.

$(A \rightarrow \neg \neg B) \rightarrow \neg \neg (A \rightarrow B)$.

7) aus $A \rightarrow \neg \neg A \rightarrow A$ und $\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow \perp) \rightarrow A$ mit 1.5.10

2.6 Lemma: In T sind herleitbar: $\forall x^0 \forall y^0 (x^0 = y^0 \vee \neg x^0 = y^0)$
und $\forall x^0 y^0 (\neg \neg x^0 = y^0 \rightarrow x^0 = y^0)$.

Beweis: Für Variable vom Grundtyp gilt:

1) $\forall y (0 = y \vee \neg 0 = y)$ durch Induktion aus

a) $0 = 0 \vee \neg 0 = 0$ 1.5.18

b) $\forall y (0 = y \vee \neg 0 = y \rightarrow 0 = Sy \vee \neg 0 = Sy)$ wegen $0 = Sa \leftrightarrow \perp$

2) $\forall x (\forall y (x = y \vee \neg x = y) \rightarrow \forall y (Sx = y \vee \neg Sx = y))$

durch $\forall$ -Schlüsse und Induktion aus:

a) $\forall y (a=y \vee \neg a=y) \rightarrow (Sa=0 \vee \neg Sa=0)$ wegen $Sa=0 \leftrightarrow \perp$.

b) $\forall z ((\forall y (a=y \vee \neg a=y) \rightarrow (Sa=z \vee \neg Sa=z)) \rightarrow$
 $(\forall y (a=y \vee \neg a=y) \rightarrow (Sa=Sz \vee \neg Sa=Sz)))$.

Denn aus den Formeln $\forall y (a=y \vee \neg a=y) \rightarrow a=b \vee \neg a=b$ und
 $a=b \leftrightarrow Sa=Sb$ (1.5.20, 21) folgt

$\forall y (a=y \vee \neg a=y) \rightarrow Sa=Sb \vee \neg Sa=Sb$.

Aus 1) und 2) zusammen ergibt sich durch Induktion
 die erste der behaupteten Formeln; die zweite folgt
 daraus mit 2.5.7.

Man könnte also bei der Übersetzung die Gleichungen
 vom Grundtyp unverändert lassen und müßte dann das
 Ergebnis 2.6 für den Beweis des folgenden Lemmas
 benutzen.

2.7 Lemma $\vdash \bar{A} \leftrightarrow \neg \neg \bar{A}$

Beweis: " $\rightarrow$ " aus 2.5.1

" $\leftarrow$ " durch Induktion über den Aufbau von A.

1) A ist $\perp$ - trivial.

2) A ist $s=t$ oder $s=t$, also $\bar{A} = \neg \neg B$ für eine Formel B.

Dann gilt $\neg \neg \bar{A} \rightarrow \bar{A}$ nach 2.5.5.

3) A ist $A_1 \wedge A_2$, $\neg \neg \bar{A} = \neg \neg (\bar{A}_1 \wedge \bar{A}_2)$.

$\neg \neg \bar{A} \rightarrow \neg \neg \bar{A}_1$ mit 2.5.2 aus 1.5.8

$\neg \neg \bar{A}_1 \rightarrow \bar{A}_1$ nach Ind. Vor.

sodaß insgesamt mit 1.5.6, 1.5.7 $\neg \neg \bar{A} \rightarrow \bar{A}_1 \wedge \bar{A}_2$.

4) A ist $A_1 \rightarrow A_2$, $\neg \neg \bar{A} = \neg \neg (\bar{A}_1 \rightarrow \bar{A}_2)$.

$\neg \neg \bar{A} \rightarrow \bar{A}_1 \rightarrow \bar{A}_2$ (2.5.6),

sodaß mit der Ind. Vor. $\neg \neg \bar{A}_2 \rightarrow \bar{A}_2$ das Ergebnis folgt.

5) A ist $\forall x F[x]$, $\neg \neg \bar{A} = \neg \neg \forall x \bar{F}[x]$.

$\neg \neg \bar{A} \rightarrow \forall x \neg \neg \bar{F}[x]$ (2.5.3).

$\neg \neg \bar{A} \rightarrow \neg \neg \bar{F}[a]$ 1.5.6, 1.5.12,

sodaß die Ind. Vor. $\neg \neg \bar{F}[a] \rightarrow \bar{F}[a]$ das Ergebnis erzielt.

2.8 Lemma In T ist herleitbar: $\neg \neg t_{\varepsilon} \lambda x \bar{F}[x] \leftrightarrow t_{\varepsilon} \lambda x \bar{F}[x]$.

Beweis: nach 2.7. gilt:

$\neg \neg \bar{F}[a] \leftrightarrow \bar{F}[a]$

d.h. $\forall y (y \varepsilon \lambda x \neg \neg \bar{F}[x] \leftrightarrow y \varepsilon \lambda x \bar{F}[x])$

also $t_{\varepsilon} \lambda x \neg \neg \bar{F}[x] \leftrightarrow t_{\varepsilon} \lambda x \bar{F}[x]$.

Andererseits gilt nach 2.5.4:

$$\neg \text{taaxF}[x] \leftrightarrow \text{taax} \neg \bar{F}[x],$$

sodaß insgesamt die Behauptung folgt.

2.9 Satz Ist A in T_c herleitbar, so $\bar{A}$ in T .

Beweis durch Herleitungsinduktion:

- 1) Die durch 1.5.1 - 1.5.7, 1.5.11 und 1.5.23 gegebenen Fälle gehen durch die Übersetzung in Axiome und Grundschlüsse derselben Art über.
- 2) Für das Axiom $\neg \neg A \rightarrow A$ folgt die Behauptung aus 2.7.
- 3) 1.5.12 wird durch 2.4 nachgewiesen, 1.5.15, 1.5.16 folgen mit 2.4 und 2.8.
- 4) 1.5.18 - 1.5.22 ergeben sich mit Lemma 2.6.

2.10 Folgerung: $\vdash_c \perp \Rightarrow \vdash \perp$.

Die klassische Theorie ist also genau dann konsistent, wenn dies für die intuitionistische gilt.

§3 Elimination der Extensionalität

Vorbemerkung:

In diesem Paragraphen soll die Konsistenz der klassischen Typentheorie mit Extensionalitätsaxiom auf den intuitionalistischen Fall zurückgeführt werden. Zu diesem Zweck wird nach dem als Restriktionstheorie bekannten Verfahren das System $T_c + (EA)$ reduziert auf die Theorie T_c ohne dieses Axiom; denn die im letzten Paragraphen verwendete Übersetzung führt hier nicht mehr zum Ziel. Zwar ist nach 2.8 für jede Einsetzung von Abstraktionstermen in das Extensionalitätsaxiom die Übersetzung in $T + (EA)$ herleitbar - insofern ist die Übersetzung von (ER) herleitbar -; dies gilt je-

doch nicht für die Übersetzung des generellen Axioms.

Dieser Sachverhalt sei vorweg noch kurz erläutert:

a) Die Übersetzung von (EA) für höhere Typen lautet:

$(\overline{\text{EA}}): \forall x^{(\tau)} y^{(\tau)} z^{(\tau)} (\forall u^{(\tau)} (\neg \neg u \varepsilon x \leftrightarrow \neg \neg u \varepsilon y) \rightarrow \neg \neg x \varepsilon z \rightarrow \neg \neg y \varepsilon z).$

Setze nun für x den Term $\lambda u(\neg \neg u \varepsilon a)$, für y die freie Variable a und für z den Term $\lambda v(\forall u(\neg \neg u \varepsilon v) \rightarrow \neg \neg \forall u(u \varepsilon v))$

ein. Dann sind für dieses Beispiel die Prämissen der Formel $(\overline{\text{EA}})$ offenbar herleitbar, und die Konklusion führt mit 2.5.6 auf die Formel $\forall u(\neg \neg u \varepsilon a) \rightarrow \neg \neg \forall u(u \varepsilon a)$. Für $(\overline{\text{EA}})$ ist also eine notwendige und, wie man sich leicht überzeugt, auch hinreichende Bedingung das Schema $\forall x \neg \neg F[x] \rightarrow \neg \neg \forall x F[x]$, das aber im Allgemeinen intuitionistisch nicht zur Verfügung steht. (Für die Arithmetik der ersten Stufe ist die Unabhängigkeit dieses Schemas in Kleene, Metamathematics, nachgewiesen.)

b) Betrachtet man dagegen die Anwendung von (EA) auf zwei Abstraktionsterme $\lambda x F[x]$ und $\lambda x G[x]$, so lautet die Übersetzung der Prämisse, d.h. der Formel, die die Gleichheit der beiden Terme ausdrückt, $\forall u(\neg \neg u \varepsilon \lambda x \overline{F}[x] \leftrightarrow \neg \neg u \varepsilon \lambda x \overline{G}[x])$. Nach 2.8 bedeutet dies aber dasselbe wie die Gleichheit von $\lambda x \overline{F}[x]$ und $\lambda x \overline{G}[x]$, sodaß mit (EA) auf $\neg \neg \lambda x \overline{F}[x] \varepsilon \overline{t} \rightarrow \neg \neg \lambda x \overline{G}[x] \varepsilon \overline{t}$ für beliebige Terme $t^{(\tau)}$ zu schließen ist.

c) Dasselbe Argument hat nun für die Extensionalitätsregel - $r^{(\tau)} = s^{(\tau)}$, $r^{(\tau)} \varepsilon t^{(\tau)}$: $s^{(\tau)} \varepsilon t^{(\tau)}$ - Gültigkeit, wenn r und s Abstraktionsterme sind. Die übrigen Fälle, in denen dieses Schlußschema in einer Herleitung auftreten kann, sind trivial. Entweder handelt es sich bei r und s um ein und dieselbe freie Variable, sodaß nichts zu zeigen ist, oder der eine Term, etwa r , wäre eine freie Variable im Unterschied zu s , sodaß Substitution auf einen Widerspruch führte.

Die Extensionalitätsregel läßt sich also in die Herleitungsinduktion von Satz 2.9 aufnehmen: ist eine Formel A in $T_c + (\text{ER})$ herleitbar, so auch die Übersetzung $\overline{A}$ in $T + (\text{ER})$.

(Die Ausführung der unter a) und c) angegebenen Argumente, die hier nur die Vorgehensweise dieses Paragraphen motivieren sollen, würde also insgesamt den Beweis erbringen, daß das Axiom (EA) stärker ist als die korrespondierende Regel (ER).)

3.1 Induktive Definition der Formeln $\underline{E(s^\tau)}$ und $\underline{s^\tau \sim t^\tau}$ für Terme vom Typ τ .

- 1) $\underline{E(s^0)} := s^0 = s^0$ (oder sonst eine herleitbare Formel)
 $\underline{s^0 \sim t^0} := s^0 = t^0$
- 2) $\underline{E(s^{(\tau)})} := \forall x^\tau y^\tau (x^\tau \sim y^\tau \rightarrow (x^\tau \varepsilon s^{(\tau)} \leftrightarrow y^\tau \varepsilon s^{(\tau)}))$.
 $\underline{s^{(\tau)} \sim t^{(\tau)}} := E(s^{(\tau)}) \wedge E(t^{(\tau)})$
 $\wedge \forall x^\tau (E(x^\tau) \rightarrow (x^\tau \varepsilon s^{(\tau)} \leftrightarrow x^\tau \varepsilon t^{(\tau)}))$.

3.2 Bemerkung: Für jeden Typ τ gibt es Terme s^τ mit $E(s^\tau)$.
 Definiere nämlich $s^{(\sigma)} := \lambda x^\sigma A$, A geschlossene Formel, $\tau = (\sigma)$.
 Dann gilt $\forall y^\sigma z^\sigma (y^\sigma \varepsilon \lambda x^\sigma A \leftrightarrow z^\sigma \varepsilon \lambda x^\sigma A)$.
 (Leere Menge oder Allmenge).

3.3 Induktive Definition der extensionalen Beschränkung e^* eines Ausdrucks e .

- 1) Ist e ein Term vom Typ 0 oder eine Variable, so ist $e^* := e$. $\perp^* := \perp$.
- 2) $(s^0 = t^0)^* := s^0 = t^0$.
- 3) $(s^\tau \varepsilon t^{(\tau)})^* := s^* \varepsilon t^*$
- 4) $(A \wedge B)^* := A^* \wedge B^*$
- 5) $(A \rightarrow B)^* := A^* \rightarrow B^*$
- 6) $(\forall x F[x])^* := \forall x (E(x) \rightarrow F^*[x])$,
 wobei $F^*[a]$ dasselbe sei wie $(F[a])^*$
- 7) $(\lambda x F[x])^* := \lambda x F^*[x]$.

3.4 Bemerkung Ist e ein Ausdruck (Formel, Term vom Typ τ), so auch e^* .

Ist F eine Nennform, sodaß $F[a^\tau]$ ein Ausdruck ist, und t ein Term vom Typ τ , so sind $F^*[t^*]$ und $(F[t])^*$ identisch.

Beweis: kanonisch durch Induktion über den Aufbau der

Ausdrücke. —

Die Extensionalitätsaxiome werden durch die angegebene Relativierung eine Tautologie:

- 3.5 Lemma (EA)* ist in T_c für jeden Typ herleitbar.
 Denn die Übersetzung (EA)* lautet für höhere Typen:

$$\forall x^{(\tau)} y^{(\tau)} z^{(\tau)} (E(x) \rightarrow E(y) \rightarrow E(z) \rightarrow \forall u^\tau (E(u) \rightarrow uEx \leftrightarrow uEy) \rightarrow xEz \rightarrow yEz),$$

 d.h. $\forall xyz (E(z) \rightarrow x \sim y \rightarrow xEz \rightarrow yEz).$

- 3.6 Lemma Sei F eine Nennform sodaß $F[a^\tau]$ und $F[b^\tau]$ Ausdrücke (Formeln, Terme) sind, und seien $u_1 \dots u_n$ die freien Variablen aus F. Dann ist herleitbar in T (resp. T_c):

$$E(u_1) \rightarrow \dots \rightarrow E(u_n) \rightarrow (a^\tau \sim b^\tau) \rightarrow (F^*[a^\tau] \sim F^*[b^\tau])$$

$$\text{resp.} \dots \rightarrow (F^*[a^\tau] \leftrightarrow F^*[b^\tau]).$$

Beweis durch Induktion über den Aufbau von $F[a]$.

$E(\bar{u})$ stehe für $E(u_1) \wedge \dots \wedge E(u_n)$.

- 1) $F[a]$ ist eine Variable u oder die Variable a oder die Konstante 0. Der Fall ist trivial.
- 2) $F[a]$ ist ein Term vom Grundtyp verschieden von den unter 1) angegebenen Fällen. Die Behauptung ergibt sich durch Induktion über die Zahl der Nachfolgersymbole S in F aus 1.5.2o.
- 3) $F[a]$ ist die Formel $G[a] \in H[a]$.

Nach Def. " $\sim$ ":

$$(H^*[a] \sim H^*[b]) \rightarrow E(G^*[a]) \rightarrow (G^*[a] \in H^*[a] \leftrightarrow G^*[a] \in H^*[b]).$$

Nach Def. "E":

$$E(H^*[b]) \rightarrow (G^*[a] \sim G^*[b]) \rightarrow (G^*[a] \in H^*[b] \leftrightarrow G^*[b] \in H^*[b]).$$

Dies läßt sich zusammenfassen und nach Def. " $\sim$ "

vereinfachen zu:

$$(G^*[a] \sim G^*[b]) \rightarrow (H^*[a] \sim H^*[b]) \rightarrow (G^*[a] \in H^*[a] \leftrightarrow G^*[b] \in H^*[b]).$$

Mit der Ind. Vor.

$$E(\bar{u}) \rightarrow (a \sim b) \rightarrow (G^*[a] \sim G^*[b]), \quad E(\bar{u}) \rightarrow (a \sim b) \rightarrow (H^*[a] \sim H^*[b])$$

folgt daraus die Behauptung.

- 4) $F[a]$ ist die Formel $G[a] \wedge H[a]$ oder $G[a] \rightarrow H[a]$.
 Der Fall folgt unmittelbar aus der Ind. Vor..

5) $F[a]$ ist die Formel $\forall x^r G[x^r, a]$.

Sei c^r eine freie Variable verschieden von $a, b, u_1, \dots, u_n$.

Nach Ind. Vor. gilt:

$$E(\bar{u}) \rightarrow E(c) \rightarrow (a \sim b) \rightarrow (G^*[c, a] \leftrightarrow G^*[c, b]).$$

1.6.2:

$$E(\bar{u}) \rightarrow (a \sim b) \rightarrow ((E(c) \rightarrow G^*[c, a]) \leftrightarrow (E(c) \rightarrow G^*[c, b]))$$

also:

$$E(\bar{u}) \rightarrow (a \sim b) \rightarrow (\forall x(E(x) \rightarrow G^*[x, a]) \leftrightarrow \forall x(E(x) \rightarrow G^*[x, b])).$$

q.e.d.

6) $F[a]$ ist der Term $\lambda x^r G[x^r, a]$.

Seien c^r, d^r verschiedene Variablen, die in

$\{a, b, u_1, \dots, u_n\}$ nicht vorkommen.

i. nach Ind. Vor.:

$$E(\bar{u}) \rightarrow E(c) \rightarrow (a \sim b) \rightarrow (G^*[c, a] \leftrightarrow G^*[c, b])$$

$$\Rightarrow E(\bar{u}) \rightarrow (a \sim b) \rightarrow E(c) \rightarrow (c \in F^*[a] \leftrightarrow c \in F^*[b])$$

$$\Rightarrow E(\bar{u}) \rightarrow (a \sim b) \rightarrow \forall x(E(x) \rightarrow (x \in F^*[a] \leftrightarrow x \in F^*[b])).$$

ii. nach Ind. Vor.:

$$E(\bar{u}) \rightarrow E(a) \rightarrow (c \sim d) \rightarrow (G^*[c, a] \leftrightarrow G^*[d, a])$$

$$\Rightarrow E(\bar{u}) \rightarrow E(a) \rightarrow (c \sim d) \rightarrow (c \in F^*[a] \leftrightarrow d \in F^*[a])$$

$$\Rightarrow E(\bar{u}) \rightarrow E(a) \rightarrow \forall xy(x \sim y \rightarrow (x \in F^*[a] \leftrightarrow y \in F^*[a])).$$

iii. wie in ii. ergibt sich:

$$E(\bar{u}) \rightarrow E(b) \rightarrow \forall xy(x \sim y \rightarrow (x \in F^*[b] \leftrightarrow y \in F^*[b])).$$

Weil aber nach Def. $a \sim b$ auch $E(a)$ und $E(b)$ einschließt,

folgt aus i.-ii. zusammen die Behauptung.

3.7 Lemma Ist t ein Term und sind $u_1, \dots, u_n$ seine freien Variablen, so ist $E(u_1) \rightarrow \dots \rightarrow E(u_n) \rightarrow E(t^*)$ herleitbar.

Beweis: sei a^0 von $u_1, \dots, u_n$ verschieden.

Nach 3.6 gilt $E(\bar{u}) \rightarrow a^0 \sim a^0 \rightarrow t^* \sim t^*$,

d.h. $E(\bar{u}) \rightarrow t^* \sim t^*$, was nach Def. aber $E(t^*)$ einschließt.

3.8 Satz Sei A eine Formel, $\{u_1, \dots, u_n\} = V(A)$.

Ist A in $T_c^+(EA)$ herleitbar,

so auch $E(u_1) \dots E(u_n) \rightarrow A^*$ in T_c .

Beweis durch Herleitungsinduktion.

Enthält die Konklusion eines Grundschlusses weniger freie Variablen als die Prämissen, so wird folgendermaßen auf die Behauptung geschlossen:

$E(u_1) \dots E(u_m) \dots E(u_n) \rightarrow A^*$, $u_m \dots u_n \notin V(A)$, $1 \leq m \leq n$,
 $\Rightarrow \exists x_m E(x_m) \dots \exists x_n E(x_n) \rightarrow E(u_1) \dots E(u_{m-1}) \rightarrow A^*$,
 nach 3.2 gilt aber $\vdash \exists x_m E(x_m)$ etc. für beliebige Typen.

1) Für die Axiome und Regeln bezüglich " $\rightarrow$ ", " $\wedge$ " und " $\perp$ " ist der Beweis trivial. Dasselbe gilt für die $\forall$ -Intro. 1.5.11 und wegen 3.4 auch für die λ -Regeln 1.5.15 und 16.

2) 1.5.12:

nach Ind. Vor. $E(\bar{u}) \rightarrow (F[t])^* \rightarrow C$,
 $\{u_1 \dots u_n\} = V(F[t], C)$.

3.4 $E(\bar{u}) \rightarrow F^*[t^*] \rightarrow C$
 $E(\bar{u}) \rightarrow (E(t^*) \rightarrow F^*[t^*]) \rightarrow C$,
 denn $E(\bar{u}) \rightarrow E(t^*)$ 3.7
 $E(\bar{u}) \rightarrow \forall x (E(x) \rightarrow F^*[x]) \rightarrow C$,

woraus nach der Vorbemerkung die Behauptung folgt.

3) Der arithmetische Teil ist trivial bis auf die Induktionsregel:

Ind. Vor.: $E(\bar{u}) \rightarrow F^*[0]$, $E(\bar{u}) \rightarrow \forall x (E(x) \rightarrow F^*[x] \rightarrow F^*[Sx])$.

$\Rightarrow E(\bar{u}) \rightarrow E(0) \rightarrow F^*[0]$

und $\forall x ((E(\bar{u}) \rightarrow E(x) \rightarrow F^*[x]) \rightarrow (E(\bar{u}) \rightarrow E(Sx) \rightarrow F^*[Sx]))$;
 denn nach Def. 3.1 gilt $\forall x^0 E(x^0)$.

Durch Anwendung der Induktionsregel folgt

$\forall x (E(\bar{u}) \rightarrow E(x) \rightarrow F^*[x])$,
 d.h. $E(\bar{u}) \rightarrow \forall x (E(x) \rightarrow F^*[x])$.

4) Für (EA) selbst ist die Behauptung schon als Lemma 3.5 bewiesen.

3.9 Folgerung $(EA) \vdash_c \perp \Rightarrow \vdash_c \perp$.

Die klassische Typentheorie T_c mit Extensionalitätsaxiom ist also genau dann konsistent, wenn dies ohne Extensionalität und d.h. für das intuitionistische System T der Fall ist.

KAPITEL II

Ein Realisierbarkeitsbegriff für T

In diesem Kapitel soll eine Interpretation der intuitionistischen Typentheorie erklärt und als angemessen nachgewiesen werden, die einige Eigenschaften explizit macht, die in der klassischen Theorie nicht vorhanden sein können. Als Ziel gilt mir dabei der Nachweis der beiden folgenden Prinzipien für geschlossene Formeln:

Explicit Definability (ED):

$\vdash \exists x^T F[x^T] \Rightarrow \vdash F[t^T]$ für einen Term t^T .

Disjunction Property (DP):

$\vdash A_1 \vee A_2 \Rightarrow \vdash A_i$ für $i=1$ oder 2 . —

Für die Erklärung der Realisierbarkeit einer Formel A gibt es in Untersuchungen zur Arithmetik verschiedene Varianten; insbesondere sind rekursive Funktionen verwendet worden, um die intendierte Bedeutung der logischen Verknüpfungen zum Ausdruck zu bringen. Eine andere Möglichkeit hat auf "realisierende Objekte" ganz verzichtet und das angestrebte Ziel mit Hilfe einer Relation erreicht, die zwischen der Formel A und gewissen Formelmengen Γ besteht, wobei auf den Herleitungsbegriff direkt Bezug genommen wird. Ich werde mich dieser Vorgehensweise anschließen und die Realisierbarkeit einer Formel A in einem Kontext Γ von Formeln erklären, kurz: " $\Gamma \Vdash A$ " oder " Γ realisiert A ". Diese Relation soll das gewünschte Ergebnis einschließen, es soll also etwa aus $\Gamma \Vdash A_1 \vee A_2$ folgen $\Gamma \vdash A_i$ für ein i . Dabei ist es für Theorien höherer Ordnung charakteristisch, daß sich die Beweisführung auf eine neue Sorte von Parametern stützt, d.h. die Sprache von T erweitert, um eine Prädikatszuordnung vornehmen zu können, bezüglich der zusammengesetzte Terme die Länge 0 bekommen.

Auf diese Weise läßt sich die Schwierigkeit überwinden, daß man einerseits ein Prädikat durch die darunterfallenden Objekte interpretieren muß, andererseits deren Wert aber, wenn es sich um komplexe Terme handelt, von der Interpretation eben dieses Prädikats abhängen kann. Um hier einen Zirkel zu vermeiden, werden zusätzliche Parameter eingeführt - ein Verfahren, das erstmals von D. Prawitz bei Schnitteliminationsbeweisen benutzt worden ist.

(Im Folgenden wird zunächst die int. Typentheorie T ohne Extensionalität betrachtet und dann das Ergebnis auf $T+(EA)$ ausgedehnt.)

§1 R-Modelle

1.1 Definition Ein R-Modell $\langle P, *, R \rangle$ für die Theorie T ist folgendermaßen erklärt:

1.1.1 P ist die disjunkte Vereinigung von nichtleeren Mengen P^τ , sodaß zu jedem Typ τ gerade eine solche Menge P^τ gehört.

Die Funktion $*$ ordnet jedem Element aus P einen geschlossenen Term desselben Typs zu. Dabei sei P^0 die Menge der geschlossenen Terme vom Grundtyp (in unserem Fall also die Menge der Zahlen) und $*^1 P^0$ sei die Identität. Für höhere Typen dagegen sollen die Elemente von P nicht zur Sprache von T gehören.

Bezeichnungen: Die Elemente von P^τ heißen die Parameter vom Typ τ . Ein P-Ausdruck (P-Formel, P-Term vom Typ τ) entsteht aus einem Ausdruck (Formel, Term vom Typ τ) dadurch, daß alle in ihm auftretenden freien Variablen durch Parameter desselben Typs ersetzt werden. Jedes Resultat einer solchen (vollständigen) Einsetzung in den Ausdruck e heißt

ein zu e analoger P-Ausdruck.-

Q^{τ} bezeichne die Menge der P-Terme vom Typ τ .-

Ich schreibe p^* für $\ast(p)$, $p \in P$, und benutze diesselbe Darstellung für die natürliche Fortsetzung der Funktion $\ast$ auf P-Ausdrücke:

Ist $F[a_1 \dots a_n]$ ein Ausdruck, der die freien Variablen $a_1 \dots a_n$ enthält, und $F[p_1 \dots p_n]$ ein analoger P-Ausdruck, so sei

$$F[p_1 \dots p_n]^* = (F[p_1 \dots p_n])^* = F[p_1^* \dots p_n^*].$$

- 1.1.2 Die Funktion R ordnet jeder P-Formel eine Menge von (nicht notwendig endlichen) Mengen geschlossener Formeln zu, sodaß die unten angegebenen Bedingungen 1.1.3 erfüllt sind.

Bezeichnungen: U bestehe aus allen Mengen geschlossener Formeln. Elemente von U bezeichne ich mit großen griechischen Buchstaben Γ, Δ etc..

$\Gamma \vdash A$ steht für $T \vdash \Gamma \vdash A$ (d.h. für eine endliche Teilmenge $\Delta \subseteq \Gamma$ gilt $\vdash \Delta \rightarrow A$). Für P-Ausdrücke verwende ich diesselben Buchstaben wie sonst für Ausdrücke.

- 1.1.3 Bedingungen für die Funktion R:

- 1) $\Gamma \vdash \perp \Rightarrow \Gamma \in R s^{\tau} \in P^{(\tau)}$ für jede P-Primformel $s^{\tau} \in P^{(\tau)}$, $p^{(\tau)} \in P^{(\tau)}$.
- 2) $\Gamma \in R s^0 = t^0 \Leftrightarrow \Gamma \vdash s^0 = t^0$. $\Gamma \in R \perp \Leftrightarrow \Gamma \vdash \perp$.
- 3) $\Gamma \in R A \wedge B \Leftrightarrow \Gamma \in R A$ und $\Gamma \in R B$.
- 4) $\Gamma \in R A \vee B \Leftrightarrow \Gamma \in R A, \Gamma \vdash A^*$ oder $\Gamma \in R B, \Gamma \vdash B^*$.
- 5) $\Gamma \in R A \supset B \Leftrightarrow$ aus $\Gamma \in R A, \Gamma \vdash A^*$ folgt $\Gamma \in R B$.
- 6) $\Gamma \in R \forall x^{\tau} F[x^{\tau}] \Leftrightarrow \Gamma \in R F[t^{\tau}]$ für alle $t^{\tau} \in Q^{\tau}$.
- 7) $\Gamma \in R \exists x^{\tau} F[x^{\tau}] \Leftrightarrow \Gamma \in R F[t^{\tau}], \Gamma \vdash F[t^{\tau}]^*$ für ein $t^{\tau} \in Q^{\tau}$.
- 8) $\Gamma \in R s^{\tau} \lambda x^{\tau} F[x^{\tau}] \Leftrightarrow \Gamma \in R F[s^{\tau}]$.

Bezeichnung: $\Gamma \in R^{\dagger} A$ bedeute $\Gamma \in R A$ und $\Gamma \vdash A^*$.

Beispiele für R-Modelle, deren Nachweis die eigentliche Schwierigkeit bildet, sind in den folgenden Paragraphen enthalten; vorweg sollen noch die Konsequenzen der allgemeinen Definition behandelt werden.

Der Satz 1.5 zeigt die Korrektheit des Kalküls T unter der Interpretation durch R-Modelle: der Umstand,

daß in einem solchen Modell eine Menge Γ gewisse Formeln realisiert, überträgt sich auf alle Folgerungen, die in T aus diesen Formeln zu erhalten sind. Insbesondere sind dann die beweisbaren Sätze von T auch schlechthin realisierbar, d.h. sie werden durch beliebige Mengen Γ realisiert, was die Eigenschaften (ED) und (DP) für T nach sich zieht.

1.2 Definition des P-Grades g eines P-Ausdrucks (induktiv, für beliebige Parametermenge P)

- 1) $gt^0 := 0$; $gp^{\tau} := 0$ für $p^{\tau} \in P^{\tau}$; $g(s^0 = t^0) = g \perp := 0$.
- 2) $g(s^{\tau} \mathcal{E} t^{(\tau)}) := \max(gs^{\tau}, gt^{(\tau)}) + 1$.
- 3) $g(A \wedge B) = g(A \vee B) = g(A \rightarrow B) := \max(gA, gB) + 1$.
- 4) $g(\forall x^{\tau} F[x^{\tau}]) = g(\exists x^{\tau} F[x^{\tau}]) := gF[p^{\tau}] + 1$ für $p^{\tau} \in P^{\tau}$.
- 5) $g(\lambda x^{\tau} F[x^{\tau}]) := gF[p^{\tau}] + 1$ für $p^{\tau} \in P^{\tau}$.

1.3 Lemma (für jedes R-Modell):

$\Gamma \vdash \perp \Rightarrow \Gamma \in RA$ für jede P-Formel A.

Der Beweis ergibt sich sofort durch Induktion nach dem P-Grad von A.-

Das Prädikat RA ist also nie leer.

1.4 Lemma (für jedes R-Modell):

Für P-Formeln $A_1, \dots, A_n$, A gilt:

$$\Gamma \in R(A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow A) \Leftrightarrow (\Gamma \in \bigcap_{i=1}^n R^+ A_i \Rightarrow \Gamma \in RA).$$

Beweis durch Induktion über die Zahl n der Prämissen.

Induktionsschritt:

$$\Gamma \in RA_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow A) \Leftrightarrow (\Gamma \in R^+ A_1 \Rightarrow \Gamma \in R(A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow A)).$$

$$\Leftrightarrow (\Gamma \in R^+ A_1 \Rightarrow (\Gamma \in \bigcap_{i=2}^n R^+ A_i \Rightarrow \Gamma \in RA))$$

$$\Leftrightarrow \Gamma \in \bigcap_{i=1}^n R^+ A_i \Rightarrow \Gamma \in RA.$$

1.5 Satz Für jedes R-Modell gilt:

Seien Γ, Δ Mengen von geschlossenen Formeln derart, daß $\Gamma \in RB$ und $\Gamma \vdash B$ für jede Formel B aus Δ gilt.
Dann gilt $\Gamma \in RA$ für jede geschlossene Formel A mit $\Delta \vdash A$.

Der Beweis des Satzes wird durch Herleitungsinduktion geführt und erfordert eine Verallgemeinerung der Behauptung, damit offene Formeln eingeschlossen sind.

Für eine Formel A soll $A[\bar{q}]$ das Resultat der Ersetzung aller in A auftretenden freien Variablen durch P-Terme bezeichnen; $\bar{q}$ stehe also für eine endliche Folge von P-Termen.

Der Beweis zeigt nun für jede Formel A mit $\Delta \vdash A$, daß $\Gamma \in R^+ A[\bar{q}]$ gilt für jede vollständige Substitution $\bar{q}$ von P-Termen in A. Induktionsbehauptung bzw. -voraussetzung sind also stets die doppelte Aussage $\Gamma \in R A[\bar{q}]$ und $\Gamma \vdash A[\bar{q}]^*$ (und natürlich $\Gamma \vdash A$). Ich verzichte darauf, den Schluß auf den zweiten Teil der Behauptung jeweils explizit zu machen - es ist ja nichts anderes als der übliche Beweis des Substitutionssatzes durch Herleitungsinduktion.

Beweis des Satzes:

- 1) Die folgenden Fälle sind trivial:

Die Formel A ist deshalb aus Δ (damit auch aus Γ) herleitbar, weil A ein Element von Δ , ein Axiom $B \rightarrow B$ oder eines der Peano-Axiome ist.

- 2) Für Axiome $\perp \rightarrow A$ folgt die Behauptung aus Lemma 1.3.

- 3) Für Grundschlüsse

$\frac{A_1 \rightarrow \dots A_n \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C : A_1 \rightarrow \dots A_n \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C}{\text{und } A \rightarrow A \rightarrow C : A \rightarrow C}$ folgt die Behauptung unmittelbar aus Lemma 1.4

- 4) Für den Schluß $C : A \rightarrow C$ ist die Behauptung trivial.

- 5) $A_1 \rightarrow \dots A_n \rightarrow A, B \rightarrow C : A_1 \rightarrow \dots A_n \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow C$.

Sei $\Gamma \in \bigcap_{i=1}^n R^+ A_i[\bar{q}]$ und $\Gamma \in R^+ (A \rightarrow B)[\bar{q}]$ für eine beliebige Substitution $\bar{q}$ von P-Termen in

$A_1 \rightarrow \dots A_n \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow C$.

Nach Ind. Vor. gilt $\Gamma \in R^+ (A_1 \rightarrow \dots A_n \rightarrow A)[\bar{q}]$ und $\Gamma \in R^+ (B \rightarrow C)[\bar{q}]$.

Mit 1.4 und Modus Ponens folgt zunächst $\Gamma \in R^+A[\bar{q}]$,
wiederum mit Modus Ponens $\Gamma \in R^+B[\bar{q}]$ und daraus
schließlich $\Gamma \in RC[\bar{q}]$.

$$6) \frac{A_1 \rightarrow \dots A_n \rightarrow A, A \rightarrow B : A_1 \dots \rightarrow A_n \rightarrow B.}{}$$

Sei $\Gamma \in \bigcap_{i=1}^n R^+A_i[\bar{q}]$ für eine Substitution $\bar{q}$ in
 $A_1 \rightarrow \dots A_n \rightarrow B$, und $\bar{q}$ eine Erweiterung von $\bar{q}$ um
für die Substitution von A nötige P-Terme.

Nach Ind. Vor. gilt $\Gamma \in R^+(A_1 \rightarrow \dots A_n \rightarrow A)[\bar{q}]$ und
 $\Gamma \in R(A \rightarrow B)[\bar{q}]$.

Mit Lemma 1.4 und Modus Ponens also $\Gamma \in R^+A[\bar{q}]$
und wiederum mit Modus Ponens $\Gamma \in RB[\bar{q}] (= RB[\bar{q}])$.

$$7) \frac{A_1 \rightarrow \dots A_n \rightarrow A, A_1 \rightarrow \dots A_n \rightarrow B : A_1 \rightarrow \dots A_n \rightarrow A \wedge B.}{}$$

Sei $\Gamma \in \bigcap_{i=1}^n R^+A_i[\bar{q}]$ für eine Substitution $\bar{q}$ von
 $A_1 \rightarrow \dots A_n \rightarrow A \wedge B$.

Nach Ind. Vor. gilt $\Gamma \in R(A_1 \rightarrow \dots A_n \rightarrow A)[\bar{q}]$,

$$\Gamma \in R(A_1 \rightarrow \dots A_n \rightarrow B)[\bar{q}],$$

sodaß mit 1.4 $\Gamma \in RA[\bar{q}]$ und $\Gamma \in RB[\bar{q}]$.

$$8) \frac{A \rightarrow C : A \wedge B \rightarrow C}{\text{(entsprechend } B \wedge A \rightarrow C \text{)}}.$$

Sei $\Gamma \in R^+A[\bar{q}]$ und $\Gamma \in R^+B[\bar{q}]$ für eine Substitu-
tion $\bar{q}$ für $A \wedge B \rightarrow C$.

Dann ist wegen der Ind. Vor. $\Gamma \in R(A \rightarrow C)[\bar{q}]$ schon
aus dem ersten Grund auch $\Gamma \in RC[\bar{q}]$.

$$9) \frac{A_1 \rightarrow \dots A_n \rightarrow A : A_1 \rightarrow \dots A_n \rightarrow A \vee B.}{\text{(entsprechend } \dots \rightarrow B \vee A \text{)}}.$$

Sei $\Gamma \in \bigcap_{i=1}^n R^+A_i[\bar{q}]$ für eine Substitution $\bar{q}$ für
 $A_1 \rightarrow \dots A_n \rightarrow A \vee B$.

Nach Ind. Vor. $\Gamma \in R^+(A_1 \rightarrow \dots A_n \rightarrow A)[\bar{q}]$,

also mit 1.4 und Modus Ponens $\Gamma \in R^+A[\bar{q}]$,

also erst recht $\Gamma \in R^+A[\bar{q}]$ oder $\Gamma \in R^+B[\bar{q}]$.

$$10) \frac{A \rightarrow C, B \rightarrow C : A \vee B \rightarrow C.}{}$$

Sei $\Gamma \in R^+(A \vee B)[\bar{q}]$ für eine Substitution $\bar{q}$ für $A \vee B \rightarrow C$,
d.h. es gilt $\Gamma \in R^+A[\bar{q}]$ oder $\Gamma \in R^+B[\bar{q}]$, sodaß aus
der Ind. Vor. $\Gamma \in R(A \rightarrow C)[\bar{q}]$ und $\Gamma \in R(B \rightarrow C)[\bar{q}]$ in
jedem Fall $\Gamma \in RC[\bar{q}]$ folgt.

$$11) \frac{A_1 \rightarrow \dots A_n \rightarrow F[a^r] : A_1 \rightarrow \dots A_n \rightarrow \forall x^r F[x^r],}{a^r \notin V(A_1, \dots, A_n).}$$

Sei $\Gamma \in \bigcap_{i=1}^n R^+ A_i [\bar{q}]$ für eine Substitution $\bar{q}$ für $A_1 \rightarrow \dots A_n \rightarrow \forall x^{\tau} F[x^{\tau}]$.

Dann gilt nach Ind. Vor. $\Gamma \in R(A_1 \rightarrow \dots A_n \rightarrow F[q^{\tau}])[\bar{q}]$ für jeden P-Term q^{τ} vom Typ τ , also auch

$\Gamma \in R[F[q^{\tau}]][\bar{q}]$ für jeden P-Term q^{τ} .

- 12) $\frac{}{F[t^{\tau}] \rightarrow C : \forall x^{\tau} F[x^{\tau}] \rightarrow C}$.

Sei $\Gamma \in R^+ \forall x^{\tau} F[x^{\tau}][\bar{q}]$ für eine Substitution $\bar{q}$ von $\forall x^{\tau} F[x^{\tau}] \rightarrow C$.

Dann gilt $\Gamma \in R^+ F[q^{\tau}, \bar{q}]$ für jeden P-Term q^{τ} , also insbesondere für einen zu t^{τ} analogen P-Term $t^{\tau}[\bar{q}]$, wobei $\bar{q}$ eine passende Erweiterung von $\bar{q}$ ist.

Aus der Ind. Vor. $\Gamma \in R(F[t^{\tau}] \rightarrow C)[\bar{q}]$ folgt dann $\Gamma \in RC[\bar{q}] (= RC[\bar{q}])$.

- 13) $\frac{A_1 \rightarrow \dots A_n \rightarrow F[t^{\tau}] : A_1 \rightarrow \dots A_n \rightarrow \exists x^{\tau} F[x^{\tau}]}{}.$

Sei $\Gamma \in \bigcap_{i=1}^n R^+ A_i [\bar{q}]$ für eine Substitution $\bar{q}$ von $A_1 \rightarrow \dots A_n \rightarrow \exists x^{\tau} F[x^{\tau}]$.

Nach Ind. Vor. gilt $\Gamma \in R^+(A_1 \rightarrow \dots A_n \rightarrow F[t^{\tau}])[\bar{q}]$ für eine Erweiterung $\bar{q}$ von $\bar{q}$. Mit 1.4 und Modus Ponens folgt

$\Gamma \in R^+ F[t^{\tau}][\bar{q}] (= R^+ F[t^{\tau}[\bar{q}], \bar{q}])$, was gerade die Behauptung ist, denn $t^{\tau}[\bar{q}] \in Q^{\tau}$.

- 14) $\frac{F[a^{\tau}] \rightarrow C : \exists x^{\tau} F[x^{\tau}] \rightarrow C}{a^{\tau} \notin V(F, C)}$.

Sei $\Gamma \in R^+ \exists x^{\tau} F[x^{\tau}][\bar{q}]$ für eine Substitution $\bar{q}$ von $\exists x^{\tau} F[x^{\tau}] \rightarrow C$,

d.h. $\Gamma \in R^+ F[q^{\tau}, \bar{q}]$ für einen P-Term q^{τ} vom Typ τ .

Nach Ind. Vor. gilt aber $\Gamma \in R(F[q^{\tau}] \rightarrow C)[\bar{q}]$,

weil $R(F[a^{\tau}] \rightarrow C)[q^{\tau}, \bar{q}] = R(F[q^{\tau}] \rightarrow C)[\bar{q}]$

wegen der Variablenbedingung.

- 15) Die Behauptung ist trivial für die Schlüsse

$\frac{A_1 \rightarrow \dots A_n \rightarrow F[t^{\tau}]}{} : A_1 \rightarrow \dots A_n \rightarrow t^{\tau} \varepsilon \lambda x^{\tau} F[x^{\tau}]$
resp. $\frac{}{F[t^{\tau}] \rightarrow C} : t^{\tau} \varepsilon \lambda x^{\tau} F[x^{\tau}] \rightarrow C$.

- 16) Induktionsregel:

Nach Induktionsvoraussetzung gilt für eine Substitution $\bar{q}$ von $F[0]$:

$\Gamma \in R^+ F[0, \bar{q}]$ und $\Gamma \in R^+ \forall x^0 (F[x^0] \rightarrow F[Sx^0])[\bar{q}]$.

D.h. für alle geschlossenen Terme t^0 folgt aus

$$\Gamma \in R^+F[t^0, \bar{q}] : \Gamma \in RF[St^0, \bar{q}]$$

und mit Modus Ponens auch $\Gamma \vdash F[St^0, \bar{q}]^*$.

Aus $\Gamma \in R^+F[0, \bar{q}]$ und $\forall t^0 : (\Gamma \in R^+F[t^0, \bar{q}] \Rightarrow$

$$\Gamma \in R^+F[St^0, \bar{q}])$$

folgt durch eine Induktion über den Aufbau der geschlossenen Terme vom Grundtyp : $\Gamma \in R^+F[t^0, \bar{q}]$ für alle t^0 , d.h., $\Gamma \in R\forall x^0 F[x^0](\bar{q})$.

1.6 Korollar Für jedes R-Modell gilt:

Ist Γ eine Menge geschlossener Formeln, sodaß $\Gamma \in RC$ für $C \in \Gamma$, so hat $T+\Gamma$ die Eigenschaften ED und DP.

Beweis: Ist eine Formel $A_1 \vee A_2$ in $T+\Gamma$ herleitbar, A_1 geschlossen, so gilt nach 1.5 $\Gamma \in RA_1 \vee A_2$, also $\Gamma \vdash A_1$ oder $\Gamma \vdash A_2$.

Entsprechendes gilt für die Formeln $\exists x^r F[x^r]$.

Ein Spezialfall von 1.6 ist die Prämissenunabhängigkeit:

Es gebe ein R-Modell sodaß $\{A\} \in RA$ für die geschlossene Formel A.

Dann gilt für die geschlossenen Formeln:

$$\vdash A \rightarrow \exists x^r F[x^r] \Rightarrow \vdash \exists x^r (A \rightarrow F[x^r])$$

$$\text{und } \vdash A \rightarrow B_1 \vee B_2 \Rightarrow \vdash (A \rightarrow B_1) \vee (A \rightarrow B_2).$$

1.7 Korollar Für jedes R-Modell gilt:

Ist Γ eine Menge geschlossener Formeln und A eine geschlossene Formel, die in T herleitbar ist.

Dann gilt $\Gamma \in RA$.

Beweis: Für die leere Menge $\emptyset$ gilt $\Gamma \in RB$, $\Gamma \vdash B$ für jede Formel $B \in \emptyset$.

Andererseits ist $\emptyset \vdash A$, sodaß mit 1.5 die Behauptung folgt.

Als unmittelbare Folgerung aus 1.6 für den Fall $\Gamma = \emptyset$ erhält man:

1.8 Korollar: Wenn es ein R-Modell für T gibt, dann hat T die Eigenschaften (ED) und (DP).

Das Ziel des nächsten Paragraphen ist es deshalb, die Existenz eines solchen Modells nachzuweisen.

§2 Ein R-Modell für T

Für Theorien der 1. Stufe ist die Existenz eines R-Modells keine Frage. Man nimmt, wie in unserer Definition geschehen, die geschlossenen Terme des Systems selbst als Modellbasis und hat dann in den Bedingungen für die Funktion R bereits eine induktive Definition dieser Funktion gegeben. Für die Typentheorie ist die Wahl der Parametermenge weniger selbstverständlich - sie stellt umgekehrt das Hilfsmittel dar, mit dem sich eine geeignete Funktion R erklären läßt. Im Folgenden soll ein - sehr allgemein gehaltenes - Beispiel für die hier nötige Vorgehensweise angegeben werden, das später dann für speziellere Zwecke abgewandelt werden soll.

2.1 Definition der möglichen Realisierungsprädikate MRe
eines geschlossenen Ausdrucks e:

Für eine geschlossene Formel A besteht MRA aus den Teilmengen von U (d.h. die Elemente von MRA sind Mengen von Mengen geschlossener Formeln).

Für einen geschlossenen Term t^τ ist MRT^τ durch Induktion über den Typ erklärt:

- 1) $\text{MRt}^0 := \{t^0\}$.
- 2) $p \in \text{MRt}^{(\tau)} : \Leftrightarrow p$ ist eine Menge von Tripeln (r^τ, q, Γ) sodaß r^τ ein geschlossener Term, $q \in \text{MRr}^\tau$ und $\Gamma \in U$ ist, und für $\Gamma \vdash \perp$ gehören alle Tripel (r^τ, q, Γ) , r^τ geschlossener Term, $q \in \text{MRr}^\tau$, zu p .

2.2 Definition der Parameter und der * Operation:

P^0 sei die Menge der geschlossenen Terme vom Grundtyp.

P sei für $\tau > 0$ die Menge aller Paare (t^τ, p) , sodaß t^τ ein geschlossener Term und $p \in \text{MRt}^\tau$ ist.

$(t^\tau, p)^*$ sei der Term t^τ .

(Um beiden folgenden Formulierungen Fallunterscheidungen zu ersparen, identifiziere ich die Elemente $t^0 \in P^0$ mit Paaren (t^0, t^0) .)

2.3 Definition der Realisierungsprädikate Re der

P-Ausdrücke e:

(Induktion über den P-Grad)

- 1) $\text{Rt}^0 := t^0$; $\text{Rt}^0 = s^0 := \{\Gamma \in U \mid \Gamma \vdash s^0 = t^0\}$;
 $\text{R} \perp := \{\Gamma \in U \mid \Gamma \vdash \perp\}$
- 2) $\text{R}(t^\tau, p) := p$.
- 3) $\text{Rs}^\tau t^\tau := \{\Gamma \mid (s^*, \text{Rs}, \Gamma) \in \text{Rr}\}$
- 4) $\text{RA}_1 \wedge \text{A}_2 := \{\Gamma \mid \Gamma \in \text{RA}_i \text{ für } i=1,2\}$
- 5) $\text{RA}_1 \vee \text{A}_2 := \{\Gamma \mid \Gamma \in \text{RA}_i \text{ und } \Gamma \vdash \text{A}_i^* \text{ für ein } i\}$
- 6) $\text{RA} \rightarrow \text{B} := \{\Gamma \mid \Gamma \in \text{RA}, \Gamma \vdash \text{A}^* \rightarrow \Gamma \in \text{RB}\}$
- 7) $\text{R}\forall x^\tau \text{F}[x^\tau] := \{\Gamma \mid \Gamma \in \text{RF}[(t^\tau, p)] \text{ für alle } (t^\tau, p) \in P^\tau\}$
- 8) $\text{R}\exists x^\tau \text{F}[x^\tau] := \{\Gamma \mid \Gamma \in \text{RF}[(t^\tau, p)], \Gamma \vdash \text{F}[(t^\tau, p)]^* \text{ für ein } (t^\tau, p) \in P^\tau\}$
- 9) $\text{R}\lambda x^\tau \text{F}[x^\tau] := \{(t^\tau, p, \Gamma) \mid (t^\tau, p) \in P^\tau \text{ und } \Gamma \in \text{RF}[(t^\tau, p)]\}$.

2.4 Lemma Für jeden P-Ausdruck e gilt $\text{Re} \in \text{MRe}^*$.

Der Beweis ergibt sich sofort durch Induktion über den P-Grad von e.

2.5 Lemma Sei $F[t]$ ein P-Ausdruck.

Dann gilt $RF[t] = RF[(t^*, Rt)]$.

Beweis: Nach Definition der $*$ -Operation und ihrer natürlichen Fortsetzung (vgl. 1.1.1) gilt zunächst $t^* = (t^*, Rt)^*$ und demzufolge $F[t]^* = F[(t^*, Rt)]^*$. Damit ergibt sich die Behauptung des Lemmas kanonisch durch Induktion über den P-Grad von $F[(t^*, Rt)]$: der durch die Fälle von 2.3.1, 2 gegebene Induktionsanfang ist trivial, und der Induktionsschritt kommt durch Einsetzen in die übrigen Bestimmungen der Definition 2.3 zustande.

z.B. 2.3.3:

$F[(t^*, Rt)]$ ist $G[(t^*, Rt)] \in H[(t^*, Rt)]$.

Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$RG[(t^*, Rt)] = RG[t]$ und $RH[(t^*, Rt)] = RH[t]$.

Da aber auch $G[(t^*, Rt)]^* = G[t]^*$, folgt

$\{\Gamma \mid (G[(t^*, Rt)]^*, RG[(t^*, Rt)], \Gamma) \in RH[(t^*, Rt)]\}$
 $= \{\Gamma \mid (G[t]^*, RG[t], \Gamma) \in RH[t]\},$
 und das ist $RF[(t^*, Rt)] = RF[t]$. -

Das Lemma zeigt also, wie die Komplexität eines Ausdrucks dadurch reduziert wird, daß ein Term gegen einen geeigneten Parameter vertauscht wird, der ja den P-Grad 0 hat. Allgemein können sich P-Terme nur dann in der angegebenen Weise gegenseitig ersetzen, wenn sie unter R und $*$ denselben Wert haben. -

Als Konsequenz von 2.5 beweise ich nun einige Aussagen über den Wert von P-Ausdrücken unter R :

2.6 Lemma $R\forall x^? F[x^?] = \{\Gamma \mid \Gamma \in RF[t^?]\}$ für jeden P-Term $t^?$.

Beweis: " $\subseteq$ " klar

" $\supseteq$ ": $\Gamma \in RF[t] \Rightarrow \Gamma \in RF[(t^*, Rt)]$.

2.7 Lemma $R\exists x^{\tau}F[x^{\tau}] = \{ \Gamma \mid \Gamma \in RF[t^{\tau}], \Gamma \vdash F[t^{\tau}]^* \text{ für einen P-Term } t^{\tau} \}$.

Beweis: " $\subseteq$ " klar

" $\supseteq$ ": $\Gamma \in RF[t] \Rightarrow \Gamma \in RF[(t^*, Rt)]$
 und $\Gamma \vdash F[t]^* \Leftrightarrow \Gamma \vdash F[(t^*, Rt)]^*$,
 weil es sich um identische Formeln handelt.

2.8 Lemma $Rt^{\tau} \lambda x^{\tau} F[x^{\tau}] = RF[t^{\tau}]$.

Beweis: $\Gamma \in Rt^{\tau} \lambda x^{\tau} F[x^{\tau}] \Leftrightarrow (t^*, Rt, \Gamma) \in R \lambda x^{\tau} F[x^{\tau}]$
 $\Leftrightarrow \Gamma \in RF[(t^*, Rt)] \Leftrightarrow \Gamma \in RF[t^{\tau}]$.

Sei $R^{\uparrow}$ die Beschränkung der in 2.3 angegebenen Funktion R auf Formeln. Da nach Definition 2.1 aus $\Gamma \vdash \perp$ stets $\Gamma \in Rs^{\tau}_{\varepsilon}(t^{(\tau)}, p)$ folgt, ergibt sich mit 2.6 - 2.8:

2.9 Satz $\langle P, *, R^{\uparrow} \rangle$ ist ein R -Modell für T . -

Damit sind die Eigenschaften ED und DP für T nachgewiesen.

2.10 Bemerkung: Die in der Vorbemerkung zu diesem Kapitel angegebene Schwierigkeit erfährt also durch die Einführung der möglichen R -Werte eines Terms höheren Typs eine Lösung. Die charakteristische Imprädikativität tritt bei diesem Vorgehen so auf, daß bei der Definition von R , z.B. in 2.3.7, über die eingangs angegebenen Prädikate MR quantifiziert wird, zu denen, wie Lemma 2.4 dann zeigt, die Prädikate R selbst gehören. -

Die Definition des vorliegenden Modells wurde angeregt durch einen Beweis für die Schnittelimination für die Typenlogik, den H. Osswald geführt hat. Der Trick, der dem Verfahren zugrundeliegt, also die Einführung von Parametern mit allen möglichen Werten, wurde auch

von H. Friedman benutzt, um für einen anderen Formalismus der Typentheorie (mit Komprehensionsaxiomen) einen Realisierbarkeitsbegriff zu entwickeln. Er zeigt, daß die in T herleitbaren Formeln realisiert werden in einer konservativen Erweiterung von T , die mit geeigneten neuen Konstanten und definierenden Axiomen gebildet wird. Die von mir verwendeten Parameter zeichnen sich vor allem dadurch aus, daß ihr Wert in Abhängigkeit von Kontextmengen Γ definiert ist, also dadurch erklärt wird, daß die auf der jeweils vorangehenden Stufe genommenen Werte mit Formelmengen Γ indiziert werden. Dieser Umstand ist für die Überlegungen der folgenden Paragraphen von Bedeutung.

§3 Zur Typentheorie mit Extensionalität

Um die Schemata ED und DP für die Typentheorie mit Extensionalitätsaxiom nachzuweisen, muß das R-Modell auf extensional definierten Parametern aufgebaut werden, was ich als Beschränkung der im letzten Paragraphen eingeführten Parametermenge durchführen will.

Zu diesem Zweck muß eine Gleichheitsrelation für die möglichen Realisierungsprädikate relativ zu den Kontextmengen Γ definiert werden, wobei von vornherein die folgende Komplikation zu beachten ist.

Aus der Äquivalenz zweier Formeln folgt nicht notwendig, daß sie auch unter R denselben Wert annehmen. Aus $\vdash A \leftrightarrow B$ läßt sich vielmehr nur auf $\Gamma \vdash RA \leftrightarrow \Gamma \vdash RB$ für $\Gamma \vdash A$ resp. $\Gamma \vdash B$ schließen. Diesem Umstand trägt die folgende Definition Rechnung, die zwei (metasprachliche) Prädikate über die in §2 erklärten Parameter definiert.

3.1 Definition von $\underline{E}$ und $\underline{\sim}$ für Elemente aus P und Formelmengen aus U durch Induktion über die Typen:

- 1) $\underline{E(r^0, r^0)} : \Leftrightarrow \vdash r^0 = r^0$ (oder sonst etwas Wahres)
 $\underline{r^0 \sim s^0} : \Leftrightarrow \Gamma \vdash r^0 = s^0, \Gamma \ni \{(EA)\}.$
- 2) $\underline{E(r^{(\tau)}, p)} : \Leftrightarrow$ für alle $(s_i^\tau, q_i) \in P^\tau, i=1,2,$
alle $\Gamma \ni \{(EA)\}$

gilt: $(s_1, q_1) \sim (s_2, q_2) \Rightarrow$
 $(s_1, q_1, \Gamma) \in p, \Gamma \vdash s_1 \varepsilon r \Leftrightarrow (s_2, q_2, \Gamma) \in p, \Gamma \vdash s_2 \varepsilon r.$

$\underline{(r_1^{(\tau)}, p_1) \sim (r_2^{(\tau)}, p_2)} : \Leftrightarrow \Gamma \ni \{(EA)\}, E(r_i, p_i)$
 $i=1,2,$

$\Gamma \vdash r_1 = r_2$, und für alle $(s^\tau, q) \in P, E(s, q)$ gilt:
 $(s, q, \Gamma) \in p_1, \Gamma \vdash s \varepsilon r_1 \Leftrightarrow (s, q, \Gamma) \in p_2, \Gamma \vdash s \varepsilon r_2.$

Dabei bezeichne $\{(EA)\}$ die Menge der Extensionalitätsaxiome.

3.2 Bemerkung: Nach Definition gilt für Parameter (r, p) :

- 1) $(r_1, p_1) \sim (r_2, p_2) \Rightarrow E(r_i, p_i), i=1,2.$
- 2) $E(r, p) \Rightarrow (r, p) \sim (r, p)$ für $\Gamma \ni \{(EA)\}.$

3.3 Definition der extensionalen Parametermengen:

$P_E^\tau := \{ (r^\tau, p) \in P^\tau \mid E(r^\tau, p) \}.$

3.4 Bemerkung: Keine der Mengen P_E^τ ist leer.

Betrachte für höhere Typen (τ) etwa Parameter
 $(r^{(\tau)}, \{(s^\tau, q, \Gamma) \mid (s^\tau, q) \in P^\tau, \Gamma \varepsilon U\})$, d.h. solche mit dem
maximalen Wert $p \varepsilon MR r^{(\tau)}.$

3.5 Definition der Funktion R_E über den P_E -Ausdrücken.

Für jeden P_E -Ausdruck e ist R_E die P_E -Beschränkung von R , d.h. die bei der Definition 2.3 von R vorgenommenen Quantifizierungen resp. Komprehensionen sind auf extensionale Parameter beschränkt.

3.6 Bemerkung: Wie im §2 gilt für jeden P_E -Ausdruck e $R_E e \in MRe^*$, sodaß die unter 3.1 definierten Begriffe auf das Paar $(e^*, R_E e)$ anwendbar sind. Daß es sich dabei um einen extensionalen Parameter handelt, wird nun zu zeigen sein.

3.7 Lemma Sei $F[(r_1^{\sim}, p_1)]$ ein P_E -Ausdruck (Term oder Formel), und es gelte $(r_1^{\sim}, p_1) \sim (r_2^{\sim}, p_2)$. Dann gilt

1) für den Term:

$$(F[(r_1, p_1)]^*, R_E F[(r_1, p_1)]) \sim (F[(r_2, p_2)]^*, R_E F[(r_2, p_2)])$$

2) für die Formel:

$$\begin{aligned} \vdash F[(r_1, p_1)]^* &\leftrightarrow F[(r_2, p_2)]^* \text{ und} \\ \vdash R_E F[(r_1, p_1)] &\leftrightarrow \vdash R_E F[(r_2, p_2)], \\ &\quad \vdash F[(r_2, p_2)]^*. \end{aligned}$$

3.8 Folgerung: Für jeden P_E -Term t gilt $E(t^*, R_E t)$.

Beweis: Die Voraussetzung von 3.7 ist nach 3.2 für einen beliebigen Parameter $(r, p) \in P_E$ und beliebiges $\Gamma \supseteq \{EA\}$ erfüllt.

Also gilt $(t^*, R_E t) \sim (t^*, R_E t)$,
und das heißt nach 3.2 $E(t^*, R_E t)$.

Für jeden P_E -Term $t^{\sim}$ ist also $(t^*, R_E t) \in P_E^{\sim}$.

Der Beweis zu Lemma 3.7 wird durch Induktion über den P-Grad des Ausdrucks $F[(r_1, p_1)]$ geführt.

Die in der Behauptung enthaltene Gleichheit bzw. Äquivalenz der korrespondierenden $*$ -Ausdrücke ist jeweils aus Γ herleitbar, weil in $(r_1, p_1) \sim (r_2, p_2)$ die Beziehung $\vdash r_1 = r_2$ eingeschlossen ist und Γ nach Definition die Extensionalitätsaxiome umfaßt. Dieser Teil des Beweises bedarf deshalb keiner besonderen Erwähnung.

Im Beweis benutze ich die Abkürzung F_i
für $F[(r_i, p_i)]$, $i=1,2$
und das Entsprechende für Teilausdrücke.
Des weiteren schreibe ich hier schlichtweg R für R_E .

Beweis:

1) Die folgenden Fälle sind trivial:

$F[(r_1, p_1)]$ ist der Parameter (r_1, p_1) oder ein anderer Parameter $(r, p) \in P_E$ oder ein Term t^0 oder eine Formel $t^0 = s^0$ oder $\perp$.

2) $F[(r_1, p_1)]$ ist die Formel $G[(r_1, p_1)] \in H[(r_1, p_1)]$.

Nach Ind. Vor.: i. $(G_1^*, RG_1) \sim_{\Gamma} (G_2^*, RG_2)$

und ii. $(H_1^*, RH_1) \sim_{\Gamma} (H_2^*, RH_2)$.

Letzteres schließt $E(H_1^*, RH_1)$ ein, daher

$(G_1^*, RG_1, \Gamma) \in RH_1, \Gamma \vdash G_1^* \varepsilon H_1^* \Leftrightarrow (G_2^*, RG_2, \Gamma) \in RH_1, \Gamma \vdash G_2^* \varepsilon H_1^*$.

Wegen i. gilt $E(G_2^*, RG_2)$, sodaß aus ii. folgt:

$(G_2^*, RG_2, \Gamma) \in RH_1, \Gamma \vdash G_2^* \varepsilon H_1^* \Leftrightarrow (G_2^*, RG_2, \Gamma) \in RH_2, \Gamma \vdash G_2^* \varepsilon H_2^*$.

Aus beiden Äquivalenzen zusammen mit der Definition

von R :

$RG_1 \varepsilon H_1, \Gamma \vdash G_1^* \varepsilon H_1^* \Leftrightarrow \Gamma \varepsilon RG_2 \varepsilon H_2, \Gamma \vdash G_2^* \varepsilon H_2^*$

3) $F[(r_1, p_1)]$ ist die Formel $G[(r_1, p_1)] \wedge H[(r_1, p_1)]$.

Nach Ind. Vor. gilt $\Gamma \varepsilon RG_1, \Gamma \vdash G_1^* \Leftrightarrow \Gamma \varepsilon RG_2, \Gamma \vdash G_2^*$

und $\Gamma \varepsilon RH_1, \Gamma \vdash H_1^* \Leftrightarrow \Gamma \varepsilon RH_2, \Gamma \vdash H_2^*$,

sodaß aus der Definition von R sofort das Ergebnis folgt.

4) $F[(r_1, p_1)]$ ist die Formel $G[(r_1, p_1)] \vee H[(r_1, p_1)]$.

Nach Ind. Vor. gilt $\Gamma \varepsilon RG_1, \Gamma \vdash G_1^* \Leftrightarrow \Gamma \varepsilon RG_2, \Gamma \vdash G_2^*$

und $\Gamma \varepsilon RH_1, \Gamma \vdash H_1^* \Leftrightarrow \Gamma \varepsilon RH_2, \Gamma \vdash H_2^*$.

Nun ist nach Definition von R

$\Gamma \varepsilon RG_1 \vee H_1, \Gamma \vdash G_1^* \vee H_1^* \Leftrightarrow \Gamma \varepsilon RG_1, \Gamma \vdash G_1^*$ oder $\Gamma \varepsilon RH_1, \Gamma \vdash H_1^*$

auf jeden Fall also

$\Leftrightarrow \Gamma \varepsilon RG_2, \Gamma \vdash G_2^*$ oder $\Gamma \varepsilon RH_2, \Gamma \vdash H_2^*$,

woraus sich nach Definition die Behauptung ergibt.

5) $F[(r_1, p_1)]$ ist die Formel $G[(r_1, p_1)] \rightarrow H(r_1, p_1)$.

Nach Ind. Vor. gilt: $\Gamma \in RG_1, \Gamma \vdash G_1^* \Rightarrow \Gamma \in RG_2, \Gamma \vdash G_2^*$
und $\Gamma \in RH_1, \Gamma \vdash H_1^* \Leftrightarrow \Gamma \in RH_2, \Gamma \vdash H_2^*$.

Nach Definition von R und mit Modus ponens gilt:

$\Gamma \in RG_1 \rightarrow H_1, \Gamma \vdash G_1^* \rightarrow H_1^* \Rightarrow \Gamma \in RG_1, \Gamma \vdash G_1^* \Rightarrow \Gamma \in RH_1$
und $\Gamma \vdash G_1^* \Rightarrow \Gamma \vdash H_1^*$

$\Rightarrow \Gamma \in RG_1, \Gamma \vdash G_1^* \Rightarrow \Gamma \in RH_1, \Gamma \vdash H_1^*$

$\Rightarrow \Gamma \in RG_2, \Gamma \vdash G_2^* \Rightarrow \Gamma \in RH_2, \Gamma \vdash H_2^*$

also insbesondere $\Gamma \in RG_2, \Gamma \vdash G_2^* \Rightarrow \Gamma \in RH_2$

d.h. $\Gamma \in RG_2 \rightarrow H_2$. Ferner $\Gamma \vdash G_2^* \rightarrow H_2^*$ wegen $\Gamma \ni \{EA\}$.

Ebenso zeigt man die umgekehrte Implikation.

6) $F[(r_1, p_1)]$ ist die Formel $\forall x^T G[x^T, (r_1, p_1)]$.

Nach Ind. Vor. gilt für beliebiges $(r^T, p) \in P_E^T$:

$\Gamma \in RG[(r, p), (r_1, p_1)], \Gamma \vdash G[(r, p), (r_1, p_1)]^*$
 $\Leftrightarrow \Gamma \in RG[(r, p), (r_2, p_2)], \Gamma \vdash G[(r, p), (r_2, p_2)]^*$

Nach Def. von R:

$\Gamma \in R\forall x^T G_1, \Gamma \vdash \forall x^T G_1^* \Rightarrow \Gamma \in RG[(r, p), (r_1, p_1)], \Gamma \vdash G[(r, p), (r_1, p_1)]^*$
für alle $(r, p) \in P_E^T$

$\Rightarrow \Gamma \in RG[(r, p), (r_2, p_2)], \Gamma \vdash G[(r, p), (r_2, p_2)]^*$
für alle $(r, p) \in P_E^T$.

$\Rightarrow \Gamma \in R\forall x^T G_2$.

Und $\Gamma \vdash \forall x^T G_2^*$ wegen $\Gamma \ni \{EA\}$.

Ebenso gilt die umgekehrte Implikation.

7) $F[(r_1, p_1)]$ ist die Formel $\exists x^T G[x^T, (r_1, p_1)]$.

Nach Ind. Vor. gilt für beliebiges $(r^T, p) \in P_E^T$:

$\Gamma \in RG[(r, p), (r_1, p_1)], \Gamma \vdash G[(r, p), (r_1, p_1)]^*$
 $\Leftrightarrow \Gamma \in RG[(r, p), (r_2, p_2)], \Gamma \vdash G[(r, p), (r_2, p_2)]^*$.

Nach Definition von R:

$\Gamma \in R\exists x^T G_1, \Gamma \vdash \exists x^T G_1^* \Leftrightarrow \Gamma \in RG[(r, p), (r_1, p_1)],$
 $\Gamma \vdash G[(r, p), (r_1, p_1)]^*$ für ein $(r, p) \in P_E^T$.

$\Leftrightarrow \Gamma \in RG[(r, p), (r_2, p_2)], \Gamma \vdash G[(r, p), (r_2, p_2)]^*$ für ein $(r, p) \in P_E^T$

$\Leftrightarrow \Gamma \in R\exists x^T G_2, \Gamma \vdash \exists x^T G_2^*$.

8) $F[(r_1, p_1)]$ ist der Ausdruck $\lambda x^{\tau} G[x^{\tau}, (r_1, p_1)]$.

i. Für zwei Parameter $(s_i, q_i) \in P_E^{\tau}$, $i=1,2$,

mit $(s_1, q_1) \sim_{\Delta} (s_2, q_2)$

gilt nach Ind. Vor.:

$\Delta \in RG[(s_1, q_1), (r_1, p_1)]$, $\Delta \vdash G[(s_1, q_1), (r_1, p_1)]^*$
 $\Leftrightarrow \Delta \in RG[(s_2, q_2), (r_1, p_1)]$, $\Delta \vdash G[(s_2, q_2), (r_1, p_1)]^*$,
 also

$(s_1, q_1, \Delta) \in R\lambda x^{\tau} G_1$, $\Delta \vdash s_1 \varepsilon \lambda x^{\tau} G_1^*$
 $\Leftrightarrow (s_2, q_2, \Delta) \in R\lambda x^{\tau} G_1$, $\Delta \vdash s_2 \varepsilon \lambda x^{\tau} G_1^*$,
 also $E(\lambda x^{\tau} G_1^*, R\lambda x^{\tau} G_1)$.

ii. Ebenso zeigt man $E(\lambda x^{\tau} G_2^*, R\lambda x^{\tau} G_2)$.

iii. Nach Ind. Vor. gilt des weitern für $(s^{\tau}, q) \in P_E^{\tau}$:

$\Gamma \in RG[(s, q), (r_1, p_1)]$, $\Gamma \vdash G[(s, q), (r_1, p_1)]^*$
 $\Leftrightarrow \Gamma \in RG[(s, q), (r_2, p_2)]$, $\Gamma \vdash G[(s, q), (r_2, p_2)]^*$.
 also $(s, q, \Gamma) \in R\lambda x^{\tau} G_1$, $\Gamma \vdash s \varepsilon \lambda x G_1^* \Leftrightarrow (s, q, \Gamma) \in R\lambda x G_2$,
 $\Gamma \vdash s \varepsilon \lambda x G_2^*$.

Aus i.-iii. insgesamt $(\lambda x G_1^*, R\lambda x G_1) \sim_{\Gamma} (\lambda x G_2^*, R\lambda x G_2)$.

3.8 Lemma Sei $F[t]$ ein P_E -Ausdruck.

Dann gilt $R_E F[t] = R_E F[(t^*, R_E t)]$.

Der Beweis durch Induktion über den P-Grad von $F[t]$ ergibt sich genauso wie in §2.

Mit Hilfe dieses Ergebnisses weist man die zu 2.5-2.9 analogen Aussagen nach.

Sei $R_E^{\uparrow}$ die Beschränkung von R_E auf P_E -Formeln und $*_E$ die Beschränkung von $*$ auf P_E -Ausdrücke. Dann gilt:

3.9 Satz $\langle P_E, *_E, R_E^{\uparrow} \rangle$ ist ein R-Modell für T.

3.10 Satz Für jede Formelmenge $\Gamma \in U$, $\Gamma \supseteq \{(EA)\}$ gilt:
 $\Gamma \in R_E(EA^{\tau})$ für jeden Typ τ .

Beweis: Zu zeigen ist

$$\Gamma \in R_E \vdash x^{(\tau)} y^{(\tau)} z^{(\tau)} (\forall w^{\tau} (w \varepsilon x \leftrightarrow w \varepsilon y) \rightarrow x \varepsilon z \rightarrow y \varepsilon z)$$

$$\text{und } \Gamma \in R_E \forall x^0 y^0 z^0 (x=y \rightarrow x \varepsilon z \rightarrow y \varepsilon z).$$

Ich beweise nur den ersten Fall, wovon der zweite eine einfachere Variante darstellt.

Seien Parameter $(r^{(\tau)}, o), (s^{(\tau)}, p), (t^{(\tau)}, q)$ in P_E gegeben und sei $\Gamma \in R_E \forall w^{\tau} (w \varepsilon (r, o) \leftrightarrow w \varepsilon (s, p)), \Gamma \vdash \forall w^{\tau} (w \varepsilon r \leftrightarrow w \varepsilon s)$ und $\Gamma \in R_E (r, o) \varepsilon (t, q), \Gamma \vdash r \varepsilon t$.

Dann bestehen die in 3.1 angeführten Voraussetzungen, um aus $E(t^{(\tau)}, q)$ auf das Ergebnis zu schließen, nämlich:
i. $\Gamma \vdash r^{(\tau)} = s^{(\tau)}$.

ii. $E(r, o), E(s, p)$

iii. für alle $(u^{\tau}, v) \in P_E^{\tau}$ gilt

$$\Gamma \in R_E (u, v) \varepsilon (r, o), \Gamma \vdash u \varepsilon r \Leftrightarrow \Gamma \in R_E (u, v) \varepsilon (s, p), \Gamma \vdash u \varepsilon s$$

$$\text{d, h, } (u, v, \Gamma) \varepsilon o, \Gamma \vdash u \varepsilon r \Leftrightarrow (u, v, \Gamma) \varepsilon p, \Gamma \vdash u \varepsilon s.$$

Insges. also aus i.-iii. $(r, o) \sim_{\Gamma} (s, p)$.

Jede Kontextmenge Γ , die die Extensionalitätsaxiome umfaßt, realisiert also auch diese Axiome in dem durch P_E gegebenen R-Modell. Das Ergebnis von §1 erlaubt deshalb den folgenden Schluß:

3.11 Folgerungen

1) (Anwendung des Satzes 1.5)

$\Gamma, \Delta \in U, \Gamma \supseteq \{(EA)\}, \Gamma \in R_E C$ und $\Gamma \vdash C$ für $C \in \Delta$.

Dann gilt auch $\Gamma \in R_E D$ für jede geschlossene Formel D mit $\Delta + (EA) \vdash D$.

2) (Anwendung des Korollars 1.6)

$T+(EA)$ hat die Eigenschaften ED und DP,

da insbesondere $\{(EA)\} \in R_E (EA)^{\tau}$ für jeden Typ τ .

§4 Zur Charakterisierung der ED, DP-Eigenschaft.

Für die intuitionistische Typentheorie T sowie ihre extensionale Erweiterung $T+(EA)$ sind damit die Eigenschaften DP und ED nachgewiesen, und mit dem Realisierbarkeitsbegriff ist darüber hinaus ein Kriterium vorhanden, das die Gültigkeit dieser Eigenschaften auch für Erweiterungen von T erkennen läßt.

Eine Formelmenge Γ heiße saturiert, wenn $T+\Gamma$, d.h. die Erweiterung von T um die Formeln aus Γ als Axiome, die Eigenschaften ED und DP hat.

Das Ergebnis von §1 hat dann die folgende Bedeutung:
Sei Γ eine Menge geschlossener Formeln und gelte für ein R -Modell $\Vdash_R A$ falls $A \in \Gamma$. Dann ist Γ saturiert.

Ich gebe ein wichtiges Beispiel (4.1-4.4 gelten für beliebige R -Modelle):

4.1 Lemma Sei Δ eine Menge von negierten geschlossenen Formeln und Γ eine Menge geschlossener Formeln derart, daß $\Gamma \vdash A$ für $A \in \Delta$.

Dann gilt $\Gamma \Vdash_R A$ für jede Formel $A \in \Delta$.

Beweis: $A \in \Delta$ heißt $A = \neg B$; nach Voraussetzung gilt $\Gamma \vdash B$.

Gilt nun auch $\Gamma \vdash B$, dann folgt $\Gamma \vdash \perp$, d.h. $\Gamma \in R \perp$.

Es gilt also $\Gamma \Vdash_R B \rightarrow \perp$ nach Definition von R .

4.2 Satz

1) Eine Menge Γ negierter geschlossener Formeln ist saturiert.

2) Sei Γ eine Menge geschlossener Formeln, und $\neg A \rightarrow A$ für jede Formel A aus Γ herleitbar.

Dann ist Γ saturiert.

Beweis zu 1) Nach 4.1 gilt $\vdash_{\epsilon} RA$ für jede Formel A aus Γ ,
sodaß aus Korollar 1.6 die Behauptung folgt.

zu 2) Für jede Formel A aus Γ gilt zunächst $\vdash \neg \neg A$ und
deshalb nach 4.1 $\vdash_{\epsilon} R \neg \neg A$.

Wegen $\vdash \neg \neg A \rightarrow A$ nach Voraussetzung, d.h. $\vdash_{\epsilon} R \neg \neg A \rightarrow A$
nach 1.7, folgt $\vdash_{\epsilon} RA$ und daraus mit 1.6 die Behauptung.

Für die in der Arithmetik der 1.Stufe definierten Harrop-Formeln gilt $A \leftrightarrow \neg \neg A$. Weil insbesondere der Allabschluß einer Harrop-Formel wieder eine Formel dieser Art ist, sind Mengen von Harrop-Formeln saturiert. Ein Analogon zu diesen speziellen Formeln der gewöhnlichen Arithmetik läßt sich für die Typentheorie dadurch gewinnen, daß man in der Manier von Harrop auf Gleichungen vom Grundtyp und doppelt negierte Primformeln aufbaut.

Damit erhält man die folgende Formelklasse:

4.3 Definition der Formelklasse H:

- 1) Alle Formeln $s^0 = t^0$ und alle Negationen gehören zu H .
- 2) $A, B \in H \Rightarrow A \wedge B \in H$
- 3) $B \in H \Rightarrow A \rightarrow B \in H$
- 4) $F[a^{\neg}] \in H \Rightarrow \forall x^{\neg} F[x^{\neg}] \in H$
- 5) $F[t^{\neg}] \in H \Rightarrow t^{\neg} \epsilon \lambda x^{\neg} F[x^{\neg}] \in H$.

4.4 Satz Jede Menge von Formeln aus H ist saturiert.

Beweis: Mit Lemma 2.5 aus Kapitel I, §2 folgt durch Induktion über den Formelaufbau, daß $\neg \neg A \rightarrow A$ für jede Formel $A \in H$ herleitbar ist. Anwendung von 4.2.2 auf den Allabschluß der vorgelegten Formeln vervollständigt dann den Beweis.

Die saturierten Mengen sind damit allerdings noch nicht vollständig charakterisiert. Ich gebe ein Beispiel für eine Formel A, sodaß $\{A\} \in RA$ gilt, also $T+A$ die ED und DP hat, aber $\neg\neg A \rightarrow A$ ausgeschlossen ist. Das Beispiel ist aus einer Arbeit von T.T.Robinson, J.S.L.30, S.140 f, übernommen.

4.5 Beispiel

Sei B eine geschlossene Formel sodaß $T_C \not\vdash B$, $T_C \not\vdash \neg B$.

Sei C eine geschlossene Formel sodaß $T_C + \neg B \not\vdash C$,

$T_C + \neg B \not\vdash \neg C$.

Betrachte die klassisch herleitbare Formel

$$A := \neg B \supset C \vee \neg C.$$

Es gilt:

1) $T \not\vdash \neg A$, weil $T_C \vdash A$.

2) $T \not\vdash A$, weil wegen $\{\neg B\} \in R \neg B$ folgen würde $T + \neg B \vdash C$ oder $T + \neg B \vdash \neg C$, also auch $T_C + \neg B \vdash C$ oder $T_C + \neg B \vdash \neg C$ im Widerspruch zur Voraussetzung über C.

3) $T \not\vdash \neg\neg A \rightarrow A$, denn es gilt $\neg\neg A \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg\neg(C \vee \neg C))$
(Kap.I,2.5),
d.h. $\neg\neg A$ ist herleitbar in T, sodaß auch A herleitbar sein müßte.

4) $\{A\} \in RA$, weil die Prämisse $A \vdash \neg B$ der Bedingung für R nicht erfüllt ist:
denn aus $A \vdash \neg B$ folgte $T_C \vdash \neg B$ im Widerspruch zur Wahl von B.

Umgekehrt werden die saturierten Mengen aber durch den Kealsierbarkeitsbegriff charakterisiert. Ich beweise dazu die folgende Umkehrung des Ergebnisses von §1.

4.6 Satz Es gibt ein R-Modell für T sodaß gilt:
 Sei Γ eine saturierte Menge geschlossener Formeln.
 Dann gilt $\Gamma \vDash A$ für jede Formel $A \in \Gamma$ (also auch
 $\Gamma \vDash B$ für jede in $T + \Gamma$ herleitbare geschlossene For-
 mel B).

Zum Beweis gebe ich die folgende Weiterentwicklung
 des R-Modells aus §2 an:

4.7 Definition von MR' :

- 1) $p \in MR'A$ für eine geschlossene Formel A
 $\Leftrightarrow p \in U$ und für jede saturierte Menge $\Gamma \in U$ gilt:
 $\Gamma \vdash A \Rightarrow \Gamma \in p.$
- 2) $MR't^0 := \{t^0\}$
- 3) $p \in MR't^{(\tau)} : \Leftrightarrow p$ ist eine Menge von Tripeln (r^τ, q, Γ)
 sodaß r^τ ein geschlossener Term ist, $q \in MR'r^\tau$ und
 $\Gamma \in U$, und für jede saturierte Menge $\Gamma \in U$ und jeden
 geschlossenen Term r^τ gilt:
 $\Gamma \vdash r^\tau \vDash t^{(\tau)} \Rightarrow (r^\tau, q, \Gamma) \in p$ für alle $q \in MR'r^\tau$.

4.8 Definition von P' und $\times$: analog §2.

4.9 Definition der Funktion R' über den P' -Ausdrücken:
 R' ist die P' -Beschränkung von R , d.h. geht aus der
 P' -Beschränkung der in der Definition 2.3 von R vor-
 genommenen Quantifizierungen und Komprehensionen her-
 vor.

4.10 Lemma Für jeden P' -Ausdruck e gilt $R'e \in MR'e^*$.

Beweis durch Induktion nach dem P' -Grad von e :

- 1) Die folgenden Fälle sind trivial:
 e ist t^0 oder $s^0 = t^0$ oder $\perp$ oder $(t^\tau, p) \in P'$.

2) e ist $s \rightarrow t$.

Sei $\Gamma \in U$ saturiert und $\Gamma \vdash (s \rightarrow t)^*$.

Nach Ind. Vor. ist $R's \in MR's^*$ und $R't \in MR't^*$.

Also gilt $(s^*, q, \Gamma) \in R't$ für alle $q \in MR's^*$ (4.7.7), also insbesondere auch $(s^*, R's, \Gamma) \in R't$, und d.h. $\Gamma \in L'sat$.

3) e ist $A \wedge B$.

Sei $\Gamma \in U$ saturiert und $\Gamma \vdash (A \wedge B)^*$, also auch $\Gamma \vdash A^*$ und $\Gamma \vdash B^*$.

Nach Def. 4.7.1 gilt dann $\Gamma \in R'A$ und $\Gamma \in R'B$, weil nach Ind. Vor. $R'A \in MR'A^*$ und $R'B \in MR'B^*$ ist, und das bedeutet $\Gamma \in R'A \wedge B$.

4) e ist $A \vee B$.

Sei $\Gamma \in U$ saturiert und $\Gamma \vdash (A \vee B)^*$, dann gilt wegen der Saturiertheit auch $\Gamma \vdash A^*$ oder $\Gamma \vdash B^*$.

Aus der Ind. Vor. $R'A \in MR'A^*$ und $R'B \in MR'B^*$ folgt mit 4.7.1

$\Gamma \in R'A$ im ersten Fall und $\Gamma \in R'B$ im zweiten Fall.

Insgesamt folgt also $\Gamma \in R'A \vee B$.

5) e ist $A \rightarrow B$.

Sei $\Gamma \in U$ saturiert und $\Gamma \vdash (A \rightarrow B)^*$.

Angenommen, $\Gamma \in R'A$ und $\Gamma \vdash A^*$, dann folgt zunächst mit

Modus ponens $\Gamma \vdash B^*$. Aus Ind. Vor. $R'B \in MR'B^*$ folgt mit 4.7.1

$\Gamma \in R'B$, insgesamt also $\Gamma \in R'A \rightarrow B$.

6) e ist $\forall x^{\tau} F[x^{\tau}]$.

Sei $\Gamma \in U$ saturiert und $\Gamma \vdash \forall x^{\tau} F[x^{\tau}]^*$, also auch $\Gamma \vdash F[(t^{\tau}, p)]^*$ für alle $(t^{\tau}, p) \in P'$.

Die Ind. Vor. $R'F[(t^{\tau}, p)] \in MR'F[(t^{\tau}, p)]^*$ impliziert dann nach 4.7.1

$\Gamma \in R'F[(t^{\tau}, p)]$ für alle $(t^{\tau}, p) \in P'$, d.h. $\Gamma \in R'\forall x^{\tau} F[x^{\tau}]$.

7) e ist $\exists x^{\tau} F[x^{\tau}]$.

Sei $\Gamma \in U$ saturiert und $\Gamma \vdash \exists x^{\tau} F[x^{\tau}]^*$. Wegen der Saturiertheit folgt $\Gamma \vdash F[(t^{\tau}, p)]^*$ für einen geschlossenen Term t^{τ} und eine (beliebige) Menge $p \in R't^{\tau}$. Die Ind. Vor. $R'F[(t^{\tau}, p)] \in MR'F[(t^{\tau}, p)]^*$ hat dann mit 4.7.1 $\Gamma \in R'F[(t^{\tau}, p)]$ zur Folge, insgesamt also $\Gamma \in R'\exists x^{\tau} F[x^{\tau}]$.

8) e ist $\lambda x^{\tau} F[x^{\tau}]$.

Sei $\Gamma \in U$ saturiert und $\Gamma \vdash t^{\tau} \lambda x^{\tau} F[x^{\tau}]^*$ für einen geschlossenen Term t^{τ} . Für beliebiges $p \in R't^{\tau}$ gilt dann $\Gamma \vdash F[(t^{\tau}, p)]^*$. Aus der Ind. Vor. $R'F[(t^{\tau}, p)] \in MR'F[(t^{\tau}, p)]^*$ für alle $p \in R't^{\tau}$ folgt mit 4.7.1 $\Gamma \in R'\lambda x^{\tau} F[x^{\tau}]$, also $(t^{\tau}, p) \in R'\lambda x^{\tau} F[x^{\tau}]$ nach Def. 2.3.9. Damit erfüllt aber $R'\lambda x^{\tau} F[x^{\tau}]$ die in 4.7.3 gestellte Bedingung.

Wie unter 2.5 erhält man:

4.11 Lemma Sei $F[t]$ ein P' -Ausdruck.

Dann gilt $R'F[t] = R'F[(t^*, R't)]$.

Daraus folgen sofort die Analoga zu 2.6-2.8 über den Wert, den R' für $\forall$ -, $\exists$ - und λ -Ausdrücke annimmt.

4.12 Lemma Für jede P' -Primformel $s^{\tau}_{\varepsilon}(t^{\tau}, p)$ gilt:

$\Gamma \in U, \Gamma \vdash \perp \Rightarrow \Gamma \in R's^{\tau}_{\varepsilon}(t^{\tau}, p)$.

Beweis: $\Gamma \vdash \perp$ hat trivialerweise $\Gamma \vdash s^{\tau}_{\varepsilon}t$ sowie die Saturiertheit von Γ zur Konsequenz.

Damit sind alle Forderungen aus 1.1.3 für die Funktion R' nachgewiesen. Wenn $R' \upharpoonright$ ihre Beschränkung auf Formeln bezeichnet, folgt also:

$\langle P', *, R' \upharpoonright \rangle$ ist ein R -Modell, und nach 4.10 und 4.7.1 realisiert in diesem Modell jede saturierte Menge Γ von geschlossenen Formeln die aus ihr herleitbaren,

insbesondere also die in ihr enthaltenen Formeln.
Der Beweis von Satz 4.6 ist damit abgeschlossen.

4.13 Bemerkung In dem angegebenen R-Modell wird jedes Extensionalitätsaxiom durch die Extensionalitätsaxiome realisiert, denn nach §3 ist die Menge $\{\{EA\}\}$ saturiert.-

Das mit Satz 4.6 erreichte Ergebnis hat natürlich keinen praktischen Wert in dem Sinne, daß es zu dem effektiven Nachweis der Saturiertheit einer vorgegebenen Formelmenge verhülfe. Der Satz gibt vielmehr nur einen Hinweis, wie dabei verfahren werden kann: wenn eine Formelmenge saturiert sein soll, muß sich dies auch mit Hilfe eines geeigneten R-Modells demonstrieren lassen. D.h. die Fragestellung ist verwandelt in die Suche nach einem spezifischen R-Modell, das sich - wie im Falle der Extensionalität durchgeführt - durch eine angemessene Beschränkung der Parametermenge aus §2 ergeben wird.

4.14 Exkurs über einen engeren Realisierbarkeitsbegriff.

Die Interpretation der Implikation, die unter den Bedingungen für die Funktion R in Def. 1.1.3 angegeben ist, weicht von der gewöhnlichen Auffassung ab, wie sie etwa den Kripke-Modellen zugrunde liegt. Im Sinne einer Interpretation intuitionistischer Logik wäre es an sich plausibler, die folgende stärkere Forderung zu stellen:

$$RA \rightarrow B = \{\Gamma \mid \Delta \supseteq \Gamma, \Delta \in RA, \Delta \vdash A^* \Rightarrow \Delta \in RB\}.$$

Diese enger gefaßte Bedingung hat einen Realisierbarkeitsbegriff zur Konsequenz, für den auch alle Obermengen einer Formelmenge Γ zu jeweils demselben Realisierungsprädikat gehören. Dies ist bei unserer Definition von R nicht immer der Fall, wie an den Formeln aus Beispiel 4.5 deutlich wird. Dort gilt

$\{A\} \in RA$, aber nicht mehr $\{A, \neg B\} \in RA$, denn sonst würde die Menge $\{A, \neg B\}$ die Formel $C \vee \neg C$ realisieren, was wegen der Unabhängigkeit der Formel C von $T_C + \neg B$ ausgeschlossen ist. Anders ausgedrückt: die Menge $\{A, \neg B\}$ ist nicht saturiert, obwohl dies für $\{A\}$ und $\{\neg B\}$ für sich genommen der Fall ist. - Diese Schwierigkeit betrifft die Extensionalitätsaxiome übrighens nicht: sie werden nach 3.10 von jeder Obermenge realisiert (und genauso steht es nach 1.7 mit den in T herleitbaren Formeln).

Mit der veränderten Interpretation der Implikation gewinnt man nun einen Realisierbarkeitsbegriff, der noch die Ergebnisse von §1 zu beweisen gestattet, aber nicht mehr die Umkehrung im Satz 4.6. Dies läßt sich ebenfalls aus Beispiel 4.5 erkennen. Dort besteht die Beziehung $\{A\} \in RA$ eben deshalb, weil die Prämisse $\neg B$ der Formel A nicht in $T+A$ herleitbar ist. Dieser Sachverhalt geht aber für Erweiterungen von $T+A$ verloren: unter der stärkeren Bedingung für die Implikation wäre $\{A\} \in RA$ also falsch. Die Saturiertheit der Menge $\{A\}$ im Beispiel 4.5 ist somit negativ begründet: aus der Formel A kann in T nicht durch Weiterschließen der kritische Teil $C \vee \neg C$ herausgebracht werden, auf den die Disjunction Property nicht zutreffen würde.

Diese Überlegungen zeigen, daß die Bedeutung der beiden Eigenschaften ED und DP nicht überschätzt werden darf, so, als wäre mit ihnen ein Kriterium gegeben, das ein formales System schon mathematisch vernünftig macht. Es ist möglich, wie das oben angegebene Beispiel $\{A, \neg B\}$ belegt, daß die Vereinigung zweier saturierter Axiomensysteme nicht mehr saturiert ist. Es können sogar einander widersprechende Systeme beide die ED- und DP-Eigenschaften haben:

Ist etwa die geschlossene Formel B klassisch unabhängig, so sind $\neg B$ und $\neg\neg B$ auch intuitionistisch weder herleitbar noch widerlegbar. Nach 4.2.1 haben aber $T+\neg B$ und $T+\neg\neg B$ beide die Eigenschaften ED und DP.

KAPITEL III

§1 Myhill's intuitionistische ZF-Mengenlehre Z

1.1 Vorbemerkung:

In seiner Arbeit "Some Properties of Intuitionistic ZF-Set Theory" führt J. Myhill eine intuitionistische Version der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre ein und beweist, daß dieses System die Existenz- und Oder-Eigenschaft (ED und DP) hat. Der Beweis benutzt dasselbe Verfahren, das H. Friedman für die intuitionistische Typentheorie entwickelt hat, und das ich im letzten Kapitel unter 2.10 kurz beschrieb. Um die dabei nötigen neuen Konstanten zu gewinnen, wird die übliche Rangordnung zu Mengen verwendet.-

Wegen der Verwandtschaft, die zwischen Mengenlehre und Typentheorie offensichtlich besteht - beide Konzepte ermöglichen etwa einen Zugang zur Analysis -, soll in diesem Kapitel ein beweistheoretischer Vergleich durchgeführt werden. Ich werde zeigen, daß in Myhill's Mengenlehre die Konsistenz der intuitionistischen Typentheorie formell nachgewiesen werden kann. Mittels der im Kapitel I geführten Beweise überträgt sich dieses Ergebnis auf die klassische Typentheorie. Das von Myhill vorgeschlagene System ist also von erheblicher beweistheoretischer Stärke, was auch aus seinem Verhältnis zur klassischen Mengenlehre deutlich wird, das eingangs kurz untersucht werden soll.

Bei der Aufstellung eines intuitionistischen Systems der Mengenlehre, d.h. der Verbindung von intuitionistischer Logik mit mengentheoretischen Axiomen, ist von vornherein eine einschränkende Vorüberlegung notwendig. Mengenzugehörigkeit und Mengengleichheit kann im Allgemeinen intuitionistisch nicht entscheidbar sein, womit das Regularitätsaxiom in Konflikt gerät, das die Existenz eines (bezüglich der ϵ -Relation)

minimalen Elements in jeder nichtleeren Menge behauptet.

Myhill hat nun dementsprechend gezeigt, daß dieses Axiom auf das Tertium non datur führt: mit der vollen Regularität $\exists x(x \in a) \rightarrow \exists x(x \in a \wedge x \neq \emptyset)$ gelangt man intuitionistisch wieder auf die klassische Mengenlehre. Denn sei für eine Formel φ die Teilmenge a von ω definiert als

$a := \{x \mid x = 1 \vee (x = \emptyset \wedge \varphi)\}$. a enthält zum wenigsten die 1, ist also nichtleer. Sei nun angenommen, es gäbe $b \in a \wedge b \neq a$, d.h. $b \in a \wedge \forall y (y \in a \rightarrow y \in b)$.

$$\Rightarrow (b = 1 \wedge \forall y (y \in a \rightarrow y \in 1)) \vee (b = \emptyset \wedge \varphi)$$

$$\Rightarrow \neg(\emptyset \in a \wedge \emptyset \in 1) \vee \varphi$$

$$\Rightarrow \neg \emptyset \in a \vee \varphi$$

$$\Rightarrow \neg(\emptyset \in 1 \vee (\emptyset = \emptyset \wedge \varphi)) \vee \varphi$$

$$\Rightarrow \neg \varphi \vee \varphi.$$

Aus diesem Grund ersetzt Myhill das Regularitätsaxiom durch ein Schema der transfiniten Induktion über ϵ

(für jede Formel φ):

$$(TI_{\epsilon}): \forall x (\forall y (y \in x \rightarrow \varphi(y)) \rightarrow \varphi(x)) \rightarrow \forall x \varphi(x).$$

Es ist offensichtlich, daß sich damit die beiden folgenden Konsequenzen ergeben, die man mit der Forderung der Regularität gewöhnlich verbindet:

- 1) Keine Menge hat sich selbst zum Element; es gibt keine ϵ -Schleifen.
- 2) Es gibt keine unendlich ansteigende ϵ -Kette.

Daß die Ersetzung der Regularität die einzige Änderung der üblichen Axiome darstellt, die nötig ist, um ein System der intuitionistischen Logik zu erhalten, läßt sich aus Myhill's Ergebnis schließen.

Die Gültigkeit der Oder-Eigenschaft bedeutet ja für ein so starkes System, Konsistenz vorausgesetzt, daß das Tertium non datur nicht herleitbar sein kann. Insbesondere kann danach auch das Regularitätsaxiom nicht intuitionistisch aus (TI_{ϵ}) abgeleitet werden.

1.2 Das System Z ist nun folgendermaßen aufgebaut:

- 1) Es gibt freie und gebundene Variablen für Mengen $(a, b, c, \dots, x, y, z)$,
die Konstante ϵ für eine Relation zwischen Mengen,
die logischen Zeichen $\wedge, \vee, \rightarrow, \exists, \forall, \perp$
und die üblichen Hilfszeichen.
- 2) Die logischen Axiome und Schlußregeln sind die
der intuitionistischen Prädikatenlogik.
- 3) Es gelten die mengentheoretischen Axiome von
Zermelo-Fraenkel mit Ausnahme des Regularitäts-
axioms. An seine Stelle tritt die transfinite
Induktion über ϵ .

Ich unterstelle eine Formalisierung der Prädikatenlogik entsprechend dem in Kap. I, 1.5.1-14, 17 angegebenen Kalkül (ohne die Typenstruktur) und die dort gegebenen Erklärungen über verschiedene gebräuchliche Abkürzungen. Im Unterschied zu Kapitel I und II sollen im Folgenden große lateinische Buchstaben (Klassen-)Terme mitteilen. Kleine griechische Buchstaben stehen für Formeln und Nennformen, deren Substitution mit runden Klammern angedeutet werden soll, also $\varphi(x)$ usw.. Auf die strenge Unterscheidung bei der Mitteilung von freien und gebundenen Variablen soll in Zukunft verzichtet werden, wenn die Schreibweise dadurch übersichtlicher wird und mit weniger Indizes auskommt.

Der Einfachheit halber setze ich ferner eine Reihe von Begriffen und Bezeichnungen voraus, wie sie der mengentheoretischen Literatur zu entnehmen sind. Insbesondere gebrauche ich die folgenden Abkürzungen: $y+1$ für $y \cup \{y\}$, $\mathfrak{F}f$ für f ist Funktion, $\mathcal{D}f$ für den Definitionsbereich, $\mathcal{W}f$ für den Wertebereich, $f'y$ für den Wert von f an der Stelle y , $f \restriction y$ für die Beschränkung von f , $\langle y, z \rangle$ für das geordnete Paar, $\mathcal{P}y$ für die Potenzmenge.

Der nächste Paragraph wird die übliche Einbettung der Zahlentheorie in die Mengenlehre für das vorliegende System referieren und damit die Grundlage für eine Arithmetisierung von T schaffen. -

1.3 Zum Verhältnis von klassischer und intuitionistischer Version der ZF Mengenlehre.

Ich stelle einige Ergebnisse zusammen, die den Beweis des folgenden Satzes erbringen:

Satz: Die klassische ZF-Mengenlehre ist widerspruchsfrei, wenn das intuitionistische System Z zusammen mit dem Schema (DNV) widerspruchsfrei ist.

Dabei sei (DNV): $\forall x \neg \neg \varphi(x) \rightarrow \neg \neg \forall x \varphi(x)$.

1.3.1 Die Umkehrung der Implikation in (DNV) bildet einen Satz der intuitionistischen Logik (vgl. Kap.I, 2.5). Intuitionistisch herleitbar sind auch:

(DN $\rightarrow$): $(\neg \neg \varphi \rightarrow \neg \neg \psi) \leftrightarrow \neg \neg (\varphi \rightarrow \psi)$ und

(DN $\wedge$): $(\neg \neg \varphi \wedge \neg \neg \psi) \leftrightarrow \neg \neg (\varphi \wedge \psi)$.

Beweis:

a) $\neg \neg (\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \neg \neg \psi)$ I, 2.5

$\leftrightarrow (\neg \neg \varphi \rightarrow \neg \neg \psi)$ Abschwächung resp. Kontraposition.

b) $\neg \neg (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg \neg \varphi$ resp. $\rightarrow \neg \neg \psi$,

daher $\neg \neg (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg \neg \varphi \wedge \neg \neg \psi$.

Die umgekehrte Implikation erhält man mit (DN $\rightarrow$) aus $\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi \wedge \psi$.

1.3.2 Das Regularitätsaxiom ist relativ widerspruchsfrei, d.h. die Konsistenz der klassischen ZF-Mengenlehre folgt aus der Konsistenz der übrigen Axiome. -

Den Beweis dieses Satzes möchte ich als bekannt voraussetzen. Er wird mit Hilfe einer Relativierung aller Formeln auf fundierte Mengen geführt.

Z_c bezeichne nun das klassische System ohne Regularitätsaxiom.

1.3.3 In der intuitionistischen Prädikatenlogik zusammen mit $(DN\forall)$ ist die Beziehung $\neg\neg A \leftrightarrow \bar{A}$ herleitbar.-

Dabei bezeichne $\bar{}$ die Formelübersetzung aus Kap.I,§2, die auf der doppelten Negation von Primformeln beruht, und für unseren Zweck genügt es, die behauptete Äquivalenz für Formeln A des klassischen Systems nachzuweisen, für das $\exists$ und $\forall$ als definierte Zeichen angenommen werden können. (Die Behauptung gilt jedoch auch für die entsprechende Erweiterung der Übersetzung $\bar{}$ auf $\exists$ und $\forall$.)

Der Beweis ergibt sich dann sofort durch Induktion über den Formelaufbau, indem man vermöge $(DN\wedge)$, $(DN\rightarrow)$, $(DN\forall)$ die doppelten Negationen aus den Formeln herauszieht.

1.3.4 Ist eine Formel A in Z_0 herleitbar, so $\bar{A}$ in $Z+(DN\forall)$; d.h. aus der Widerspruchsfreiheit von $Z+(DN\forall)$ folgt die Widerspruchsfreiheit von Z_0 und damit die der klassischen ZF-Mengenlehre.-

Der Beweis durch Herleitungsinduktion ergibt sich wie in Kap.I,2.9, wobei die Übersetzung der in Z_0 verbliebenen mengentheoretischen Axiome mittels 1.3.3 aus den entsprechenden Axiomen von Z hergeleitet wird.-

Natürlich gilt auch die Umkehrung des somit bewiesenen Satzes: denn aus dem Regularitätsaxiom folgt die Transfinite Induktion, und das Schema $(DN\forall)$ wird in der klassischen Logik eine Tautologie.

§2 Rekursive Definition und Einbettung der Zahlentheorie in $\mathbb{Z}$.

Das Unendlichkeitsaxiom lautet:

$$(U\infty): \exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \rightarrow y+1 \in x)).$$

Dann läßt sich ω definieren als die bezüglich der Inklusion kleinste Menge, die unter der Nachfolgerrelation abgeschlossen ist und die Null enthält. Mit Hilfe des Aussonderungsschemas ergibt sich nämlich aus (UE):

$$\exists v \forall u(u \in v \leftrightarrow \forall x(\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \rightarrow y+1 \in x) \rightarrow u \in x)).$$

Definiere also $\omega := \{u \mid \forall x(\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \rightarrow y+1 \in x) \rightarrow u \in x)\}$.

Dann ist vollständige Induktion für Formeln φ herleitbar:

$$2.1 \text{ Satz } \vdash \varphi(\emptyset) \wedge \forall x(x \in \omega \wedge \varphi(x) \rightarrow \varphi(x+1)) \rightarrow \forall x(x \in \omega \rightarrow \varphi(x)).$$

Der Beweis ergibt sich sofort aus der Definition von ω .

Über ω lassen sich Funktionen rekursiv definieren:

$$2.2 \text{ Satz } \text{ Zu jeder Funktion } G \text{ und jeder Menge } a \text{ gibt es genau eine Funktion } f \text{ über } \omega \text{ mit } f(\emptyset) = a \text{ und } \forall x(x \in \omega \rightarrow f'(x+1) = G'f'x).-$$

Der Beweis wird wie üblich mit Hilfe der vollständigen Induktion geführt.

Wegen $Df = \omega$ ist f eine Menge (Ersetzungsaxiom).

Als Folgerung erhält man nun die Einbettung der Zahlentheorie in $\mathbb{Z}$:

$$2.3.1 \text{ Die Elemente von } \omega \text{ genügen den } \underline{\text{Peano Axiomen}}.$$

Für den Beweis genügt es, die beiden folgenden Axiome zu betrachten:

$$1) \forall x, y(x, y \in \omega \rightarrow x+1=y+1 \rightarrow x=y).-$$

$$x+1=y+1 \Rightarrow (x \in y \vee x=y) \wedge (y \in x \vee y=x)$$

$$\Rightarrow (x \in y \wedge y \in x) \vee (x \in y \wedge y=x) \vee (y \in x \wedge x=y) \vee x=y,$$

wovon die drei ersten Alternativen durch (TIe)

widerlegt werden.

2) $\forall x(x \in \omega \rightarrow x+1 = x \rightarrow \perp)$. -

$x+1 = x \Rightarrow x \in x \Rightarrow \perp$ mit (TI₄)

2.3.2 Die Gleichheit von Elementen aus ω ist entscheidbar.

Der in Kap. I gegebene Beweis läßt sich wegen der Gültigkeit der Peano Axiome übernehmen.

2.3.3 Addition und Multiplikation lassen sich rekursiv definieren.

Definiere nämlich zu $a \in \omega$ die Funktionen $a+$ und $a \cdot$ über ω durch

1) $a + '0 = a$, $a + '(b+1) = (a + 'b) + 1$

2) $a \cdot '0 = 0$, $a \cdot '(b+1) = (a \cdot 'b) + 'a$

Durch vollständige Induktion folgt, daß diese Funktionen Werte in ω nehmen.

2.4 Satz über die induktive Definition von Mengen:

Ist a eine Menge und sind $F_1 \dots F_n$ Funktionen, so gibt es genau eine bezüglich der Induktion minimale Menge b sodaß gilt:

(IO) $a \subset b$

für $i=1, \dots, n$:

(II) $\bigwedge_{j=1}^n v_{ij} \in b \wedge \varphi_i(v_{i1} \dots v_{im_i}) \rightarrow F_i \langle v_{i1} \dots v_{im_i} \rangle \in b$.

Dabei sind die v_{ij} Variable, unter denen alle die in den Formeln φ_i frei auftretenden Variablen vorkommen und $\bigwedge_{j=1}^m$ sei eine Folge von Konjunktionen ($\bigvee_{j=1}^m$ entsprechend von Disjunktionen).

Beweis: Die Funktion F sei definiert durch $\langle x, y \rangle \in F \Leftrightarrow$

$$y = \{ z \mid z \in x \vee \bigvee_{i=1}^n y_{i1} \dots y_{im_i} \left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} y_{ij} \in x \wedge \varphi_i(y_{i1} \dots y_{im_i}) \right) \wedge z = F_i \langle y_{i1} \dots y_{im_i} \rangle \}.$$

Durch Rekursion gewinnt man die Funktion g mit

$Dg = \omega$, $g'0 = a$, $\forall x(x \in \omega \rightarrow g'(x+1) = F'g'x)$.

Setze $b := \bigcup \omega g$, dann ist b eine Menge, und es gilt:

- 1) $v \in b \Leftrightarrow \exists x (x \in \omega \wedge v \in g'x)$.
- 2) $x, y \in \omega \wedge x \leq y \wedge v \in g'x \Rightarrow v \in g'y$ (durch Induktion nach y).
- 3) $v \in a \rightarrow v \in g'\emptyset$, d.h. $a \in b$.

- 4) Unter der Voraussetzung von $v_{ij} \in b$, $j=1 \dots m_i$,
und $\varphi_i(v_{i1} \dots v_{im_i})$

gibt es nach 1) $x_{ij} \in \omega$ mit $v_{ij} \in g'x_{ij}$.

Also für $x := \sup(x_{i1} \dots x_{im_i})$ gilt nach 2)

$$v_{ij} \in g'x \text{ für } j=1 \dots m_i,$$

d.h. nach Konstruktion von $g: F_i \langle v_{i1} \dots v_{im_i} \rangle \in g'(x+1)$,

d.h. $F_i \langle v_{i1} \dots v_{im_i} \rangle \in b$.

Nach 3) und 4) hat b die verlangten Eigenschaften.

Ich zeige die Eindeutigkeit: sei c eine Menge mit
(10)...(1n).

Durch vollständige Induktion erhält man:

- 5) $\forall x (x \in \omega \rightarrow g'x \subset c)$, denn nach Voraussetzung gilt:

$$a) g'\emptyset = a \subset c$$

$$b) y \in g'(x+1) \Leftrightarrow y \in F_i g'x \Leftrightarrow$$

$$y \in g'x \vee \bigvee_{i=1}^n y_{i1} \dots y_{im_i} \left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} y_{ij} \in g'x \wedge \varphi_i(y_{i1} \dots y_{im_i}) \right) \\ \wedge y = F_i \langle y_{i1} \dots y_{im_i} \rangle,$$

sodaß $g'x \subset c \rightarrow g'(x+1) \subset c$, durch vollständige Induktion also 5) folgt.

Aus 1) und 5) zusammen ergibt sich $v \in b \rightarrow v \in c$.

Der Beweis der Eindeutigkeit gestattet folgende Anwendung:

2.5 Bemerkung über den induktiven Beweis nach (10)...(1n):

Um zu zeigen, daß ein Prädikat $\varphi(x)$ allen Elementen der induktiven definierten Menge b zukommt, genügt der Nachweis, daß sich die Eigenschaft $\varphi(x)$ bei den Induktionsschritten vererbt und für Elemente der Basismenge a zutrifft. Man wendet also das Argument unter 5) an für $c := \{x \mid \varphi(x)\}$.

2.6 Bemerkung über die induktive Definition mit Parametern:

Der Satz 2.4 bleibt gültig, wenn die Definitionsschritte von Parametermengen p_i abhängen, d.h. wenn (II) lautet:

$$\bigwedge_{j=1}^i v_{ij} \in b \wedge \varphi_i(v_{i1} \dots v_{im_i}) \wedge v \in p_i \rightarrow F_i \langle v_{i1} \dots v_{im_i}, v \rangle \in b.$$

Im Beweis wird dann die Funktion F definiert durch

$$\langle x, y \rangle \in F \leftrightarrow y = \{z \mid z \in x \vee \bigvee_{j=1}^i \exists y_{i1} \dots y_{im_i} y_0 (\bigwedge_{j=1}^i y_{ij} \in x \wedge y_0 \in p_i$$

$$\wedge \varphi_i(y_{i1} \dots y_{im_i}) \wedge z = F_i \langle y_{i1} \dots y_{im_i}, y_0 \rangle \}.$$

2.7 Bemerkung über die Umkehrung der Definitionsschritte:

Durch Induktion über die Definitionsschritte nach 2.5 ergibt sich zunächst

$$x \in b \rightarrow x \in a \vee \bigvee_{j=1}^i \exists y_{i1} \dots y_{im_i} (\bigwedge_{j=1}^i y_{ij} \in b \wedge \varphi_i(y_{i1} \dots y_{im_i}) \wedge x = F_i \langle y_{i1} \dots y_{im_i} \rangle).$$

Wenn sich nun die Definitionsschritte gegenseitig ausschließen, d.h. wenn a und die W_{F_i} paarweise disjunkt sind, und darüberhinaus die Funktionen F_i umkehrbar sind, läßt sich schließen:

$$F_i \langle v_{i1} \dots v_{im_i} \rangle \in b \rightarrow \bigwedge_{j=1}^i v_{ij} \in b \wedge \varphi_i(v_{i1} \dots v_{im_i}).$$

§5 Eine Darstellung der intuitionistischen Typen-
theorie T in Z.

Vorbemerkung:

Ich benutze hier das in Kap.I,§1, erklärte reduzierte System T, das ohne die logischen Zeichen $\wedge, \vee, \exists$ und deren Regeln auskommt.-

Um eine Arithmetisierung von T zu gewinnen, werden zunächst die Grundzeichen von T in eindeutiger Weise durch Elemente von ω ersetzt. Aus der einschlägigen Literatur - z.B. Gödels Originalarbeit - ist bekannt, daß dann die Zusammensetzung von Grundzeichen zu endlichen Folgen sowie alle für unseren Zweck notwendigen Operationen an solchen Zeichenreihen, also etwa das Aneinanderfügen von Zeichen, Substitution usw., durch zahlentheoretische Funktionen eindeutig beschrieben werden können, die in Z rekursiv definierbar sind. Auf die explizite Angabe solcher Funktionen und der Wahl der bestimmten Elemente aus ω für die Grundzeichen soll hier verzichtet werden; es genügt für die folgende Argumentation, daß geeignete Zuordnungen effektiv gegeben sind. Um der besseren Lesbarkeit willen werden dann Zeichenreihen von T wie gewohnt als Folgen von Grundzeichen geschrieben, die zwischen Apostrophen stehen, um anzudeuten, daß der Wert der entsprechenden zahlentheoretischen Funktion gemeint ist; dabei wird dann die aus Kap.I,II vertraute Notation für Formeln usw. gebraucht. Ist umgekehrt die Nummer n einer Zahlenreihe gegeben, so soll n für die Reihe selbst stehen. Dieser Darstellungsweise entspricht es, wenn ich Begriffe wie Term, herleitbare Formel usw. durch induktiv definierte Mengen nach 2.4 in Z formalisiere.-

Das erforderliche Zeichenmaterial ist in 3.1-3.5 aufgeführt; die unter diesen Ziffern gefaßten Teilmengen von ω seien paarweise disjunkt und effektiv festgelegt.

3.1 Es gibt drei Elemente aus ω für die runden Klammern und das Nennzeichen *.

3.2 Um auf den Charakter von Ausdrücken aus T explizit in Z Bezug nehmen zu können, benötige ich so- dann zwei Elemente 0 und 1 aus ω (nicht notwendig identisch mit $\emptyset$ und 1). 0 sei der Grundtyp der Terme, 1 charakterisiere Formeln (Formeltyp).

3.2.1 Induktive Definition der Menge $\mathcal{T}$ der Typen von T:

(T0) $0 \in \mathcal{T}$

(T1) $\tau \in \mathcal{T} \rightarrow '(\underline{\tau})' \in \mathcal{T}$

('($\underline{\tau}$)' ist also der Wert, den die zahlentheoretische Funktion, die das Einklammern einer Zeichenreihe wiedergibt, für das Argument τ annimmt.)

Grundzeichen:

3.3 Zu jedem Typ $\tau \in \mathcal{T}$ gibt es eine unendliche Teilmenge V^τ aus ω , deren Elemente die freien Variablen vom Typ τ sind. Die Mengen V^τ sind paarweise disjunkt, V ist ihre Vereinigung.

3.4 Entsprechend für die Mengen W^τ von gebundenen Variablen.

3.5 0, S, =, $\rightarrow$, $\forall$, ε , λ , $\perp$ seien verschiedene Elemente von ω .

3.6 Eine Zeichenreihe von T ist eine endliche Folge der unter 3.1, 3.3-3.5 angeführten Zeichen. Die Menge der $n \in \omega$, für die $\underline{n}$ eine Zeichenreihe ist, heiße $\mathcal{Z}$. Es ist entscheidbar, wann eine Zahl eine Zeichenreihe repräsentiert, welche Zeichen darin auftreten usw.. Für $z \in \mathcal{Z}$ sei $V(z)$ die Menge der freien Variablen, die in $\underline{z}$ auftreten; Entsprechend gibt $W(z)$ die gebundenen Variablen an.

$V^+(z)$ sei $V(z) \cup \{0\}$, falls 0 in z auftritt.

Ist $F \in \mathbb{Z}$, so sei $F[z]$ die Nummer der Zeichenreihe, die entsteht, wenn das Nennzeichen $\times$ überall da, wo es in F auftritt, durch die Zeichenreihe z ersetzt wird.

Für den Gebrauch solcher Nennformen F seien die folgenden Abkürzungen vereinbart:

$$N(F, \tau, x) : \Leftrightarrow F \in \mathbb{Z} \wedge \tau \in \mathbb{T} \wedge x \in W^{\tau} \wedge x \notin W(F)$$

$$N(F, \tau, x, a) : \Leftrightarrow N(F, \tau, x) \wedge a \in V^{\tau}$$

$$N!(F, \tau, x, a) : \Leftrightarrow N(F, \tau, x, a) \wedge a = \min\{y \mid y \in V^{\tau} \wedge y \notin V(F)\}.$$

3.7 Induktive Definition der Menge E^0 der Terme vom Typ 0:

$$(E^0_0): V^0 \cup \{0\} \subset E^0$$

$$(E^0_1): t \in E^0 \rightarrow \text{'St'} \in E^0.$$

3.8 Induktive Definition der Menge E der Ausdrücke von T zusammen mit ihren Typen:

$$(E_0): \{\langle a, \tau \rangle \mid a \in \mathbb{Z} \wedge \tau \in V^{\tau}\} \cup \{\langle t, 0 \rangle \mid t \in E^0\} \cup \{\langle \perp, I \rangle\} \subset E.$$

$$(E_1): \langle s, 0 \rangle \in E \wedge \langle t, 0 \rangle \in E \rightarrow \langle \underline{s} \underline{=} \underline{t}, I \rangle \in E$$

$$(E_2): \langle A, I \rangle \in E \wedge \langle B, I \rangle \in E \rightarrow \langle \underline{A} \rightarrow \underline{B}, I \rangle \in E$$

$$(E_3): \langle F[a], I \rangle \in E \wedge N(F, \tau, x, a) \rightarrow \langle \forall x F[x]', I \rangle \in E$$

$$(E_4): \langle F[a], I \rangle \in E \wedge N(F, \tau, x, a) \rightarrow \langle \lambda x F[x]', (\tau) \rangle \in E$$

$$(E_5): \langle s, \tau \rangle \in E \wedge \langle t, (\tau) \rangle \in E \rightarrow \langle \underline{s} \underline{\tau} \underline{t}', I \rangle \in E.$$

Durch Induktion über diese Definitionen erhält man:

1) $\mathbb{T} \cup E, D \in \mathbb{Z} \subset \omega, W[E] = T \cup \{I\}$.

2) unter eventuell nötiger Umbenennung von gegebenen Variablen gilt:

$$\langle F[t], \tau \rangle \in E, \langle t, (\tau) \rangle \in E, \langle s, \tau \rangle \in E \rightarrow \langle F[s], \tau \rangle \in E. -$$

Die Definitionen 3.7 und 3.8 erlauben offensichtlich Umkehrungen im Sinne von 2.7.-

$E^{\tau} := \{x \mid \langle x, \tau \rangle \in E\}$ ist die Menge der Terme vom Typ τ ,

$E^I := \{x \mid \langle x, I \rangle \in E\}$ ist die Menge der Formeln,

$E := D \cup E = E^I \cup \bigcup_{\tau \in T} E^{\tau}$ ist die Menge der Ausdrücke.

Für einen Ausdruck $e \in E$ gibt E^e den Typ an.

Für technische Zwecke ist der folgende Begriff nötig:

3.9 Induktive Definition der Relation $\leq$, die die Unterausdrücke eines Ausdrucks $e \in E$ angibt:

- (≤ 1) $e \leq e$
- (≤ 2) ' $\underline{St}' \leq e \rightarrow t \leq e$
- (≤ 3) ' $\underline{s=t}' \leq e \rightarrow s \leq e \wedge t \leq e$.
- (≤ 4) ' $\underline{set}' \leq e \rightarrow s \leq e \wedge t \leq e$
- (≤ 5) ' $\underline{A} \rightarrow \underline{B}' \leq e \rightarrow A \leq e \wedge B \leq e$
- (≤ 6) ' $\forall x \underline{F}[x]' \leq e \wedge N!(F, \tau, x, a) \rightarrow F[a] \leq e$
- (≤ 7) ' $\lambda x \underline{F}[x]' \leq e \wedge N!(F, \tau, x, a) \rightarrow F[a] \leq e$.

Durch Induktion über Def. 3.9 resp. 3.8 und 3.7 folgt sofort:

- 1) Die Unterausdrücke eines Ausdrucks sind wiederum Ausdrücke.
- 2) $a \leq b$ und $b \leq c$ impliziert $a \leq c$.
- 3) Die Menge der Unterausdrücke eines Ausdrucks ist endlich.

Für die folgende Definition benötige ich noch zwei Abkürzungen, nämlich:

$\Gamma \in E : \Leftrightarrow \Gamma$ ist eine endliche Folge von Formeln, etwa

$A_1, A_2, \dots, A_n$.

Für eine Formel A sei dann ' $\Gamma \rightarrow \underline{A}$ ' := ' $(\underline{A}_1 \rightarrow (\underline{A}_2 \rightarrow \dots \rightarrow (\underline{A}_n \rightarrow \underline{A}) \dots))$ '.

Im Folgenden werden Formeln von T mit der üblichen Klammerersparnis wiedergegeben.

3.10 Induktive Definition der Menge H der in T herleitbaren Formeln:

- (H0): $\{e \mid ((e = \underline{A} \rightarrow \underline{A}' \vee e = \underline{\perp} \rightarrow \underline{A}') \wedge A \in E^I) \vee ((e = \forall x(x=x) \vee e = \forall xyz(x=y \rightarrow z=y \rightarrow x=z)' \vee e = \forall xy(x=y \rightarrow Sx=Sy) \vee e = \forall xy(Sx=Sy \rightarrow x=y)' \vee e = \forall x(Sx=x \rightarrow \underline{\perp})') \wedge x, y, z \in W^0)\} \subset H$.
- (H1): $\Gamma \in \bar{E} \wedge \Gamma \rightarrow \underline{A} \rightarrow \underline{B} \rightarrow \underline{C}' \in H \rightarrow \Gamma \rightarrow \underline{B} \rightarrow \underline{A} \rightarrow \underline{C}' \in H$
- (H2): ' $\underline{A} \rightarrow \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ ' $\in H \rightarrow \underline{A} \rightarrow \underline{B}' \in H$.

- (H3): $B \in E^I \wedge A \in H \rightarrow \underline{B} \rightarrow \underline{A} \in H$
 (H4): $\Gamma \in \bar{E} \wedge \Gamma \rightarrow \underline{A} \in H \wedge \underline{B} \rightarrow \underline{C} \in H \rightarrow \Gamma \rightarrow (\underline{A} \rightarrow \underline{B}) \rightarrow \underline{C} \in H$
 (H5): $\Gamma \in \bar{E} \wedge \Gamma \rightarrow \underline{A} \in H \wedge \underline{A} \rightarrow \underline{B} \in H \rightarrow \Gamma \rightarrow \underline{B} \in H$
 (H6): $\Gamma \in \bar{E} \wedge \Gamma \rightarrow \underline{F}[a] \in H \wedge N(F, \tau, x, a) \wedge a \notin V(\Gamma) \rightarrow \Gamma \rightarrow \forall x \underline{F}[x] \in H$
 (H7): $\underline{F}[\underline{t}] \rightarrow \underline{C} \in H \wedge N(F, \tau, x) \wedge t \in E \xrightarrow{\tau} \forall x \underline{F}[x] \rightarrow \underline{C} \in H$
 (H8): $\Gamma \rightarrow \underline{F}[\underline{t}] \in H \wedge \Gamma \in \bar{E} \wedge N(F, \tau, x) \wedge t \in E \xrightarrow{\tau} \Gamma \rightarrow \underline{t} \varepsilon \lambda x \underline{F}[x] \in H$
 (H9): $\underline{F}[\underline{t}] \rightarrow \underline{C} \in H \wedge N(F, \tau, x) \wedge t \in E \xrightarrow{\tau} \underline{t} \varepsilon \lambda x \underline{F}[x] \rightarrow \underline{C} \in H$
 (H10): $F[0] \in H \wedge \forall x (\underline{F}[x] \rightarrow \underline{F}[Sx]) \in H \wedge N(F, o, x) \rightarrow \forall x \underline{F}[x] \in H$

Durch Induktion nach (H0) - (H10) folgt sofort $H \in E^I$.

Def. 3.10 erlaubt offenbar keine Umkehrungen im Sinne von 2.7.

3.11 Induktive Definition der Menge H_E der in $T+(EA)$ herleitbaren Formeln:

$(H_E0) \dots (H_E10)$ wie (H0) ... (H10) mit H_E anstelle von H

$(H_E11): \{ \forall xyz (x=y \rightarrow x \varepsilon z \rightarrow y \varepsilon z) \mid x, y \in W^0 \wedge z \in W^0 \} \subset H_E$.

$(H_E12): \{ \forall xyz (\forall u (u \varepsilon x \leftrightarrow u \varepsilon y) \rightarrow x \varepsilon z \rightarrow y \varepsilon z) \mid \tau \in \hat{\Gamma} \wedge u \in W^{\tau} \wedge x, y \in W^{(\tau)} \wedge z \in W^{(\tau)} \} \subset H_E$.

§4 Eine Interpretation von T in Z - vorbereitende Definitionen für den Konsistenzsatz.

Im Folgenden soll erklärt und in Z formal definiert werden, wann eine Formel in T gültig ist. Dazu sind zunächst ein Individuenbereich und Belegungen über diesem Bereich zu spezifizieren, durch die eine Formel erfüllt werden kann. Weil die Theorie T ein System der Arithmetik ist, gehen wir für den Individuenbereich von der Menge ω aus, die, der Typenstruktur von T folgend, mit einer Hierarchie von Potenzmengen überbaut wird. Damit ist zugleich die Extensionalität sichergestellt.

4.1 Induktive Definition der Menge $\overline{\Pi}$:

$$(\Pi 0): \langle 0, \omega \rangle \in \overline{\Pi}$$

$$(\Pi 1): \langle \tau, v \rangle \in \overline{\Pi} \rightarrow \langle \tau', \mathcal{P}v \rangle \in \overline{\Pi}.$$

Durch Induktion über diese Definition folgt sofort:

$$\mathcal{F}_n \overline{\Pi}, \mathcal{D} \overline{\Pi} = \tau,$$

$$\langle 0, v \rangle \in \overline{\Pi} \rightarrow v = \omega, \langle \tau, v \rangle \in \overline{\Pi} \rightarrow \exists! u (\langle \tau, u \rangle \in \overline{\Pi} \wedge v = \mathcal{P}u).$$

Für jeden Typ τ soll $\overline{\Pi}'\tau$ die Individuen enthalten, die diesem Typ entsprechen. Eine Menge von solchen Elementen aus $\overline{\Pi}'\tau$ ist dann ein Objekt der nächst höheren Stufe, d.h. ein Element von $\overline{\Pi}'(\tau)$.

Durch $\bigcup \overline{\Pi}$ sind dann alle Individuen unserer Interpretation von T gegeben.

Belegungen einer Zeichenreihe sind dann Funktionen, die den in ihr auftretenden freien Variablen Mengen von entsprechendem Rang zuordnen:

4.2 Definition:

$$\mathcal{B}(z, f): \leftrightarrow z \in \mathbb{Z} \wedge \mathcal{F}_n f \wedge \mathcal{D}f = V^+(z) \wedge \mathcal{W}f \subseteq \bigcup \overline{\Pi}$$

$$\wedge \forall y (y \in \mathcal{D}f \rightarrow (y=0 \rightarrow f'y = \emptyset) \wedge (y \in V^{\tau} \rightarrow f'y \in \overline{\Pi}'\tau)).$$

Die Existenz von solchen Funktionen ist keine Frage; man kann sie auf den endlichen Zeichenreihen explizit, z.B. mit $\emptyset$ als konstantem Wert definieren. Für eine Zeichenreihe z ist $\{f \mid B(z, f)\}$ eine Teilmenge von $V^+(z) \times \mathcal{U} \cap \mathcal{T}$ und damit eine Menge.

Sind z_1, z_2 Zeichenreihen derart, daß $V^+(z_2) \subset V^+(z_1)$, so folgt $B(z_2, f \upharpoonright V^+(z_2))$ aus $B(z_1, f)$.

Hat man umgekehrt $B(z_i, f_i)$, $i=1,2$ vorgegeben, so gibt es eine Funktion f mit $B(\langle z_1, z_2 \rangle, f)$ und $f \upharpoonright V^+(z_i) = f_i$, wenn nur die Belegungen miteinander verträglich sind, d.h. auf $\mathcal{D}f_1 \cap \mathcal{D}f_2$ übereinstimmen.

Abkürzung: Für die Beschränkung $f \upharpoonright V^+(z)$ einer Belegungsfunktion schreibe ich in Zukunft $f \upharpoonright z$.

Wann eine Formel A durch eine einschlägige Belegung f erfüllt wird, soll nun durch Rekursion über die induktive Definition der Ausdrücke von T erklärt werden. Dafür müssen zugleich den Termen von T geeignete Mengen aus dem Universum $\mathcal{U} \cap \mathcal{T}$ als Werte zugeschrieben werden, die sie unter einer Belegung annehmen. Für die Objektvariablen und die Konstante 0 sind diese Werte natürlich unmittelbar durch die Belegungsfunktionen bestimmt. Für Abstraktionsterme $\lambda x F[x]$ dagegen muß sich der Wert über die Belegungsfunktionen ergeben, die das dazugehörige Prädikat $F[a]$ erfüllen - d.h. es wird mit ihrer Hilfe eine entsprechende Menge in $\mathcal{U} \cap \mathcal{T}$ gebildet.-

Den elementaren Fall behandle ich vorweg:

4.3 Induktive Definition der Funktion f^0 über $V \cup E^0$:

$(f^0_0): e \in V \cup \{0\} \rightarrow (e, \{\langle f, f' \rangle \mid E(e, f) \}) \in f^0$.

$(f^0_1): e \in E^0 \wedge (e, h) \in f^0 \rightarrow (e, \langle \underline{c}e, \{ \langle f, g+1 \rangle \mid \langle f, g \rangle \in h \} \rangle) \in f^0$.

Durch Induktion über diese Definition folgt sofort:

$$1) \mathcal{F}_n \mathcal{J}^0, \mathcal{D}\mathcal{J}^0 = \bigvee \mathcal{E}^0.$$

2) Für $e \in \mathcal{D}\mathcal{J}^0$ gilt $\mathcal{F}_n(\mathcal{J}^0 e)$ und $\mathcal{D}(\mathcal{J}^0 e) = \{f \mid B(e, f)\}$, wobei für Terme e vom Typ τ $\mathcal{W}(\mathcal{J}^0 e) \subseteq \prod \tau$ folgt.

$\mathcal{J}^0 e$ ordnet also dem Term e für jede Belegung eine Menge von der Stufe zu, die seinem Typ entspricht. Für die Ziffern 0, 50 usw. aus T handelt es sich dabei um die korrespondierenden Elemente aus ω .

Diese Funktion $\mathcal{J}^0$ soll nun so fortgesetzt werden, daß sie für alle Formeln von T die sie erfüllenden Belegungen bezeichnet. Die folgenden Definition formuliert nun dazu die Bedingungen, die den logischen Verknüpfungen gemäß zu stellen sind:

4.4 Definition der Relation $S(a, u)$.

$$S(a, u) : \Leftrightarrow a \in E \wedge \mathcal{F}_a u \wedge \mathcal{D}u = \{e \in E \mid e \in a\} \wedge \forall e (e \in a \rightarrow S_1(e, u) \wedge \dots \wedge S_7(e, u)).$$

Dabei sind die Formeln $S_i(e, u)$ folgendermaßen definiert:

$$S_1(e, u) : \Leftrightarrow e \in \bigvee \mathcal{E}^0 \rightarrow u' e = \mathcal{J}^0 e.$$

$$S_2(e, u) : \Leftrightarrow e = \perp \rightarrow u' e = \emptyset.$$

$$S_3(e, u) : \Leftrightarrow e = \underline{s} = \underline{t} \rightarrow u' e = \{f \mid B(e, f) \wedge (u' s)'(f \upharpoonright s) = (u' t)'(f \upharpoonright t)\}$$

$$S_4(e, u) : \Leftrightarrow e = \underline{A} \rightarrow \underline{B} \rightarrow u' e = \{f \mid B(e, f) \wedge ((f \upharpoonright A) \in u' A \rightarrow (f \upharpoonright B) \in u' B)\}$$

$$S_5(e, u) : \Leftrightarrow e = \forall x \underline{F}[x] \rightarrow N! (F, \tau, x, y) \rightarrow u' e = \{f \mid B(e, f) \wedge \forall z (z \in \prod \tau \rightarrow (f \cup \langle y, z \rangle \upharpoonright \tau \cap [y]) \in u' F[y])\}.$$

$$S_6(e, u) : \Leftrightarrow e = \lambda x \underline{F}[x] \rightarrow N! (F, \tau, x, y) \rightarrow u' e = \{\langle f, g \rangle \mid B(e, f) \wedge g = \{z \in \prod \tau \mid (f \cup \langle y, z \rangle \upharpoonright \tau \cap F[y]) \in u' F[y]\}\}.$$

$$S_7(e, u) : \Leftrightarrow e = \underline{s} \varepsilon \underline{t} \rightarrow u' e = \{f \mid B(e, f) \wedge (u' s)'(f \upharpoonright s) \in (u' t)'(f \upharpoonright t)\}.$$

Bei dieser Definition ist zunächst klar, daß die verwendeten Komprehensionen auf Mengen führen; denn in S_3 bis S_5 und S_7 wird aus der Menge $\{f \mid B(e, f)\}$ ausgesondert und in S_6 liegt das Produkt mit der Menge $\prod \tau$ zugrunde.

In S_6 ist - genauso wie in S_1 - $u'e$ eine Funktion, die jeder Belegung von e eine dem Typ von e entsprechende Menge g , d.h. ein Element aus $\mathcal{P}(\tau)$ zuordnet.

In S_3 und S_7 werden ε und $=$ dementsprechend durch die analogen Relationen in $UW\mathcal{P}$ interpretiert.

Die durch $S(a,u)$ für einen Ausdruck a festgelegt Funktion u hat damit insgesamt die folgende Bedeutung:

- a) Für jede Unterformel e von a gibt $u'e$ die einschlägigen Belegungsfunktionen f an, die diese Formel erfüllen.-

Beispielsweise wird eine Allformel $\forall x F[x]$ nach S_5 durch solche Belegungen f erfüllt, für die alle Fortsetzungen $f \cup \{y, z\}$ die Formel $F[y]$ erfüllen, wenn y eine neue Variable passenden Typs ist und z alle Mengen entsprechender Stufe aus unserem Individuenbereich durchläuft.

Eine geschlossene Formel kann dabei höchstens von der trivialen Belegung $\emptyset$ erfüllt werden, was insbesondere für das Falsum $\perp$ nach S_2 ausgeschlossen ist: $u'\perp = \emptyset \neq \{\emptyset\}$.

- b) Für jeden Subterm e gibt $u'e$ die Werte aus $UW\mathcal{P}$ an, die e für die vorliegenden Belegungen erhält.-

Wird beispielsweise von dem unerfüllbaren Prädikat $F[x]$, also $u'F[x] = \emptyset$, der Term $\lambda x F[x]$ gebildet, so enthält $u'\lambda x F[x]$ nach S_6 nur Paare $\langle f, \emptyset \rangle$, d.h. dem Abstraktionsterm entspricht unter allen möglichen Belegungen die leere Menge.-

Die Beschränkung der Belegungsfunktion $f \cup \{y, z\}$ auf $F[y]$ in S_5 und S_6 ist bei unserer Definition von $B(e, f)$ nötig, weil die Variable y nicht unbedingt in $F[y]$ auftritt.

Ich beweise nun einige Folgerungen der Definition von $S(a,u)$, mit denen sich die für alle Ausdrücke von T erklärte Fortsetzung f der Funktion f^0 ergibt:

4.5 Lemma $S(a,u) \rightarrow \forall e(e \leq u \rightarrow S(e,u \upharpoonright \{x \in E \mid x \leq e\}))$.

Dies ist eine unmittelbare Konsequenz von Def. 4.4 und der Transitivität der Relation $\leq$, die die Unterausdrücke angibt.

4.6 Lemma $S(a,u) \wedge S(a,v) \rightarrow u=v$.

Beweis durch Induktion über die Definition der Ausdrücke $a \in E$, wobei für den Induktionsschritt jeweils Lemma 4.5 angewendet wird.

4.7 Lemma $\forall a(a \in E \rightarrow \exists u S(a,u))$.

Beweis durch Induktion über die Definition der Ausdrücke $a \in E$. Beim Induktionsschritt wird jeweils die gegebene Funktion u nach den Bedingungen S_i aus 4.4 erweitert und mit der Induktionsvoraussetzung und 4.6 und 4.5 erschlossen, daß die Forderungen von 4.4 für alle Unterausdrücke erfüllt sind.

Ich betrachte nur ein Beispiel.

Sei $a = 'A \rightarrow B'$ und es gebe v, w mit $S(A, v)$ und $S(B, w)$.

Setze $\bar{u} := v \vee w$.

$\Rightarrow \text{Rel } \bar{u}$ und $D\bar{u} = \{x \in E \mid x \leq A \vee x \leq B\}$.

Es gilt $\mathfrak{F}_n \bar{u}$, denn: $\langle e, x \rangle \in \bar{u} \wedge \langle e, y \rangle \in \bar{u} \Rightarrow$

$(\langle e, x \rangle \in v \vee \langle e, x \rangle \in w) \wedge (\langle e, y \rangle \in v \vee \langle e, y \rangle \in w)$

$\Rightarrow (\langle e, x \rangle \in v \wedge \langle e, y \rangle \in v) \vee (\langle e, x \rangle \in w \wedge \langle e, y \rangle \in w)$

$\vee (\langle e, x \rangle \in v \wedge \langle e, y \rangle \in w) \vee (\langle e, y \rangle \in v \wedge \langle e, x \rangle \in w)$.

Aus den beiden ersten Alternativen folgt $x=y$ wegen $\mathfrak{F}_n v$ und $\mathfrak{F}_n w$.

Aus den beiden übrigen Alternativen folgt zunächst $e \in Dv$ und $e \in Dw$, also $e \leq A$ und $e \leq B$. Mit 4.5 folgt

$S(e, v \upharpoonright \{z \in E \mid z \leq e\})$ und $S(e, w \upharpoonright \{z \in E \mid z \leq e\})$, also mit 4.6

$v \upharpoonright \{z \in E \mid z \leq e\} = w \upharpoonright \{z \in E \mid z \leq e\}$, also mit $\mathfrak{F}_n v$ und $\mathfrak{F}_n w$ wiederum $x=y$.

Setze nun $u := \bar{u} \cup \{f \mid B(\underline{A} \rightarrow \underline{B}', f) \wedge (f \Vdash A \in \bar{u}'A \rightarrow f \Vdash B \in \bar{u}'B)\}$.

Dann ist offenbar der Forderung S_4 Genüge getan, und es gilt auch $\mathcal{F}u$ und $\mathcal{D}u = \{e \in E \mid e \leq A \rightarrow B'\}$.

Bleibt zu zeigen, daß die Bedingungen $S_i(e, u)$ für alle weiteren Unterausdrücke e erfüllt sind.

$e \leq A \rightarrow S(e, v \upharpoonright \{x \in E \mid x \leq e\})$, also $v \upharpoonright \{x \in E \mid x \leq e\} = u \upharpoonright \{x \in E \mid x \leq e\}$ wegen $\mathcal{F}u$. Entsprechendes gilt für $e \leq B$ und die Funktion w , sodaß $e \leq A \vee e \leq B \rightarrow S(e, u \upharpoonright \{x \in E \mid x \leq e\})$, was nichts anderes ist als die Behauptung.

4.8 Definition $\mathcal{f} := \{ \langle a, x \rangle \mid \exists u (S(a, u) \wedge x = u'a) \}$.

Wegen 4.6 gilt $\mathcal{F}\mathcal{f}$, wegen 4.7 $\mathcal{D}\mathcal{f} = E$, wegen 4.5-7 schließlich $\forall a (a \in E \rightarrow S(a, \mathcal{f} \upharpoonright \{e \mid e \leq a\}))$.

Insgesamt ergibt sich also: $\forall a (a \in E \rightarrow S_1(a, \mathcal{f}) \wedge \dots \wedge S_7(a, \mathcal{f}))$.

Daß $\mathcal{f}$ die einzige Funktion über E ist, die diese Eigenschaften hat, erkennt man durch Induktion über die Definition von E .

Im Rest des Paragraphen werden noch einige Folgerungen bewiesen, die die Anwendung der so definierten Funktion erleichtern.

4.9 Lemma über die Substitution:

Sei $F[t] \in E$, $t \in E^r$, $a \in V^r$, $a \notin V(F[t])$, und der Term t trete wirklich in $F[t]$ auf.

Sei ferner f eine Belegung von $F[t]$ und die Belegung $\bar{f}$ von $F[a]$ definiert durch

$$\bar{f} := (f \upharpoonright F) \cup \{ \langle a, (f't)'(f \upharpoonright t) \rangle \}.$$

Dann gilt:

1) für die Formel $F[t]$: $f \in \mathcal{f}'F[t] \Leftrightarrow \bar{f} \in \mathcal{f}'F[a]$.

2) für den Term $F[t]$: $(\mathcal{f}'F[t])'f = (\mathcal{f}'F[a])'\bar{f}$.

Wegen $(\mathcal{f}'t)'(f \upharpoonright t) \in \mathcal{F}'t$ nach 4.8 und 4.4 resp. 4.3 und der Voraussetzung über a gilt $B(F[a], \bar{f})$.

Der Beweis des Lemmas wird nun durch Induktion über den Aufbau von $F[a] \in E$ geführt.

- 1) $F[a] = a$ - klar
- 2) $F[a] = 'SG[a]' \in E^0$.
 $(f'F[t])'f = (f'G[t])'f+1$ nach 4.3
 $= (f'G[a])'f+1$ nach Ind. Vor.
 $= (f'F[a])'f$ nach 4.3
- 3) $F[a] = 'G[a] = H[a]'$ mit $G[a], H[a] \in E^0$.
 $f \in f'F[t] \Leftrightarrow (f'G[t])'(\bar{f} \cap G[t]) = (f'G[t])'(\bar{f} \cap H[t])$
nach 4.4
 $\Leftrightarrow (f'G[a])'(\bar{f} \cap G[a]) = (f'G[a])'(\bar{f} \cap H[a])$
nach Ind. Vor.
 $\Leftrightarrow \bar{f} \in f'F[a]$ nach 4.4
- 4) $F[a] = 'G[a] \cap H[a]'$ - analog zu 3).
- 5) $F[a] = 'G[a] \rightarrow H[a]'$.
 $f \in f'F[t] \Leftrightarrow ((f'G[t]) \in f'G[t] \rightarrow (f'H[t]) \in f'H[t])$ nach 4.4
 $\Leftrightarrow ((\bar{f} \cap G[a]) \in f'G[a] \rightarrow (\bar{f} \cap H[a]) \in f'H[a])$ n. Ind. Vor.
 $\Leftrightarrow \bar{f} \in f'F[a]$ nach 4.4
- 6) $F[a] = '\forall x G[x, a]'$, und es gelte $N!(G[a], \mathcal{G}, x, y)$
sowie $N!(G[t], \mathcal{G}, x, y)$.
 $f \in f'F[t] \Leftrightarrow \forall z (z \in \bar{f} \cap \mathcal{G} \rightarrow (f \cup \{y, z\}) \cap G[y, t]) \in f'G[y, t])$
nach 4.4
 $\Leftrightarrow \forall z (z \in \bar{f} \cap \mathcal{G} \rightarrow (f \cup \{y, z\}) \cap G[y, a]) \in f'G[y, a])$
nach Ind. Vor.
 $\Leftrightarrow \bar{f} \in f'F[a]$ nach 4.4
- 7) $F[a] = '\lambda x G[x, a]'$, und es gelte $N!(G[a], \mathcal{G}, x, y)$
sowie $N!(G[t], \mathcal{G}, x, y)$.
 $(f'F[t])'f = \{z \in \bar{f} \cap \mathcal{G} \mid (f \cup \{y, z\}) \cap G[y, t]) \in f'G[y, t]\}$ nach 4.4
 $= \{z \in \bar{f} \cap \mathcal{G} \mid (\bar{f} \cup \{y, z\}) \cap G[y, a]) \in f'G[y, a]\}$ n. Ind. Vor.
 $= (f'F[a])'f$ nach 4.4.

4.10 Folgerung Sei $F[t] \in E^I$, $t \in E^{\mathcal{C}}$, $N(F, \mathcal{C}, x)$.

Dann gilt $f'F[t] = f'('t \mathcal{E} \lambda x F[x]')$.

Beweis: t trete in $F[t]$ auf - andernfalls ist die Behauptung trivial.

Sei $a := \min\{y \in V^{\mathcal{C}} \mid y \notin V(F[t])\}$, sei $B(F[t], f)$.

$f \in f'F[t] \Leftrightarrow ((f \cap F) \cup \{a, (f't)'(f \cap t)\}) \in f'F[a]$ nach 4.9

$$\Leftrightarrow (f't)'(f\backslash t) \in f'(\lambda x F[x])'(f\backslash F) \quad \text{nach 4.4 } S_6,$$

$$\Leftrightarrow f \in f'(\lambda x F[x])' \quad \text{nach 4.4 } S_7.$$

4.11 Lemma über die Gleichheit von Termen:

Seien $s, t, E^{(\tau)}, x \in W^{\tau}$ und f sodaß $B(\lambda x (x \in s \leftrightarrow x \in t), f)$.

Dann gilt $f \in f'(\lambda x (x \in s \leftrightarrow x \in t))' \Leftrightarrow (f's)'(f\backslash s) = (f't)'(f\backslash t)$.

Beweis: Sei $a = \min\{y \in V^{\tau} \mid y \notin V(s, t)\}$.

$$f \in f'(\lambda x (x \in s \leftrightarrow x \in t))' \Leftrightarrow$$

$$\forall z (z \in W^{\tau} \rightarrow ((f\backslash s) \cup \{a, z\}) \in f'(\lambda x s') \Leftrightarrow ((f\backslash t) \cup \{a, z\}) \in f'(\lambda x t'))$$

nach 4.4, S_5 und S_4 .

$$\Leftrightarrow \forall z (z \in W^{\tau} \rightarrow (z \in (f's)'(f\backslash s) \Leftrightarrow z \in (f't)'(f\backslash t))).$$

nach 4.4 S_7 .

Dies ist aber $(f's)'(f\backslash s) = (f't)'(f\backslash t)$, da nach Def. 4.4 beides Mengen aus $W^{\tau}(\tau)$ sind, also nach Def. 4.1 nur Elemente aus $W^{\tau}(\tau)$ enthalten.

§5 Beweis der Konsistenz von T in Z.

In diesem Paragraphen soll der Nachweis der Konsistenz der Typentheorie T sowie ihrer extensionalen Variante $T+(EA)$ geführt werden. Formal bedeutet dies, daß zwei Formeln in Z hergeleitet werden, die wie folgt definiert sind:

5.1 Definition:

Cons T : $\leftrightarrow \perp \notin H$; resp. Cons T+(EA) : $\leftrightarrow \perp \notin H_E$.

Die im vorangegangenen Paragraphen erklärte Funktion f gibt an, welche Belegungen f einer Formel $a \in E^I$ diese Formel erfüllen; die Bedingung lautete $f \in J^I a$. Wenn dies für alle einschlägigen Belegungen zutrifft, ist die Formel gültig:

5.2 Definition:

Val a : $\leftrightarrow a \in E^I \wedge \forall f (B(a, f) \rightarrow f \in J^I a)$.

Das Falsum ist keine gültige Formel:

5.3 Lemma $\neg \text{Val } \perp$.

Beweis: Nach 4.2 gilt $B(\perp, \emptyset)$,
andererseits nach 4.4 S_2 : $f^I \perp = \emptyset$,
sodaß $\text{Val } \perp \rightarrow \emptyset \in \emptyset$, d.h. $\neg \text{Val } \perp$.

Herleitbare Formeln sind dagegen gültig:

5.4 Satz $a \in H \rightarrow \text{Val } a$, $a \in H_E \rightarrow \text{Val } a$.

Aus 5.3 und 5.4 zusammen folgt sofort der
Konsistenzsatz: $\text{Cons } T \wedge \text{Cons } T+(EA)$.

Der Rest dieses Paragraphen gilt dem Beweis von Satz 5.4. Der Beweis wird durch Induktion über die Definition 3.10 der herleitbaren Formeln geführt und beruht in jedem einzelnen Fall auf einer Anwendung des analogen Axioms bzw. Grundschlusses aus Z .

5.5 Hilfssatz: Sei $\Gamma \in \bar{E}$, $A \in E^I$ und $B(\underline{\Gamma} \rightarrow \underline{A}', f)$.

Dann gilt $f \in f'(\underline{\Gamma} \rightarrow \underline{A}') \Leftrightarrow (f \upharpoonright \Gamma \in f' \Gamma \rightarrow f \upharpoonright A \in f' A)$,
wenn für die Folge Γ von Formeln $A_1 \dots A_n$ die Abkürzung $f' \Gamma$ den Durchschnitt der $f' A_i$, $i=1 \dots n$, bedeutet.

Beweis aus 4.4 durch Induktion über die Zahl der Formeln in Γ .

5.6 Val ($\underline{A} \rightarrow \underline{A}'$).

Beweis: $f \in f'(\underline{A} \rightarrow \underline{A}') \Leftrightarrow (f \in f' A \rightarrow f \in f' A')$ für $B(A, f)$.

5.7 Val ($\underline{\Gamma} \rightarrow \underline{A} \rightarrow \underline{B} \rightarrow \underline{C}'$) $\rightarrow$ Val ($\underline{\Gamma} \rightarrow \underline{B} \rightarrow \underline{A} \rightarrow \underline{C}'$).

Beweis: für $B(\underline{\Gamma} \rightarrow \underline{A} \rightarrow \underline{B} \rightarrow \underline{C}', f)$ gilt:

$f \in f'(\underline{\Gamma} \rightarrow \underline{A} \rightarrow \underline{B} \rightarrow \underline{C}')$.
 $\Rightarrow f \upharpoonright \Gamma \in f' \Gamma \rightarrow f \upharpoonright A \in f' A \rightarrow f \upharpoonright B \in f' B \rightarrow f \upharpoonright C \in f' C$
 $\Rightarrow f \upharpoonright \Gamma \in f' \Gamma \rightarrow f \upharpoonright B \in f' B \rightarrow f \upharpoonright A \in f' A \rightarrow f \upharpoonright C \in f' C$
 $\Rightarrow f \in f'(\underline{\Gamma} \rightarrow \underline{B} \rightarrow \underline{A} \rightarrow \underline{C}')$.

5.8 Val ($\underline{A} \rightarrow \underline{A} \rightarrow \underline{B}'$) $\rightarrow$ Val ($\underline{A} \rightarrow \underline{B}'$).

Beweis: sei $B(\underline{A} \rightarrow \underline{B}', f)$.

$\Rightarrow f \in f'(\underline{A} \rightarrow \underline{A} \rightarrow \underline{B}')$
 $\Rightarrow f \upharpoonright A \in f' A \rightarrow f \upharpoonright A \in f' A \rightarrow f \upharpoonright B \in f' B$
 $\Rightarrow f \upharpoonright A \in f' A \rightarrow f \upharpoonright B \in f' B$
 $\Rightarrow f \in f'(\underline{A} \rightarrow \underline{B}')$

5.9 Val $A \rightarrow$ Val ($\underline{B} \rightarrow \underline{A}'$).

Beweis: Sei $B(\underline{B} \rightarrow \underline{A}', f)$,

$\Rightarrow f \upharpoonright A \in f' A$
 $\Rightarrow f \upharpoonright B \in f' B \rightarrow f \upharpoonright A \in f' A$
 $\Rightarrow f \in f'(\underline{A} \rightarrow \underline{B}')$

5.10 Val ($\underline{\Gamma} \rightarrow \underline{A}'$) $\wedge$ Val ($\underline{B} \rightarrow \underline{C}'$) $\rightarrow$ Val ($\underline{\Gamma} \rightarrow (\underline{A} \rightarrow \underline{B}) \rightarrow \underline{C}'$).

Beweis: Sei $B(\underline{\Gamma} \rightarrow (\underline{A} \rightarrow \underline{B}) \rightarrow \underline{C}', f)$

$\Rightarrow f \upharpoonright \underline{\Gamma} \rightarrow \underline{A}' \in f'(\underline{\Gamma} \rightarrow \underline{A}') \wedge f \upharpoonright \underline{B} \rightarrow \underline{C}' \in f'(\underline{B} \rightarrow \underline{C}')$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f \upharpoonright \Gamma \in f' \upharpoonright \Gamma &\rightarrow f \upharpoonright A \in f' \upharpoonright A \\ &\text{und } f \upharpoonright B \in f' \upharpoonright B \rightarrow f \upharpoonright C \in f' \upharpoonright C \\ \Rightarrow f \upharpoonright \Gamma \in f' \upharpoonright \Gamma &\rightarrow (f \upharpoonright A \in f' \upharpoonright A \rightarrow f \upharpoonright B \in f' \upharpoonright B) \rightarrow f \upharpoonright C \in f' \upharpoonright C \\ \Rightarrow f \in f' &(\Gamma \rightarrow (\underline{A} \rightarrow \underline{B}) \rightarrow \underline{C}). \end{aligned}$$

$$5.11 \quad \underline{\text{Val}(\Gamma \rightarrow \underline{A}') \wedge \text{Val}(\underline{A} \rightarrow \underline{B}') \rightarrow \text{Val}(\Gamma \rightarrow \underline{B}')}.$$

Beweis: Sei $B(\Gamma \rightarrow \underline{B}', f)$ und $g \models f$ derart daß,

$$\begin{aligned} B(\Gamma, \underline{A}, \underline{B}', g) &\text{ und } g \upharpoonright \Gamma \rightarrow \underline{B}' = f. \\ \Rightarrow g \upharpoonright \Gamma \rightarrow \underline{A}' \in f'(\Gamma \rightarrow \underline{A}') &\wedge g \upharpoonright \underline{A} \rightarrow \underline{B}' \in f'(\underline{A} \rightarrow \underline{B}') \\ \Rightarrow g \upharpoonright \Gamma \in f' \upharpoonright \Gamma \rightarrow g \upharpoonright \underline{A} \in f' \upharpoonright \underline{A} \\ &\text{und } g \upharpoonright \underline{A} \in f' \upharpoonright \underline{A} \rightarrow g \upharpoonright \underline{B} \in f' \upharpoonright \underline{B}. \\ \Rightarrow g \upharpoonright \Gamma \in f' \upharpoonright \Gamma &\rightarrow g \upharpoonright \underline{B} \in f' \upharpoonright \underline{B} \\ \Rightarrow g \upharpoonright \Gamma \rightarrow \underline{B}' \in f'(\Gamma \rightarrow \underline{B}') \\ \Rightarrow f \in f' &(\Gamma \rightarrow \underline{B}'). \end{aligned}$$

$$5.12 \quad \underline{\text{Val}(\Gamma \rightarrow \underline{F}[a]') \wedge N(F, \tau, x, a) \wedge a \notin V(\Gamma)} \\ \rightarrow \underline{\text{Val}(\Gamma \rightarrow \forall x \underline{F}[x]')}.$$

Beweis: a trete in $F[a]$ auf; andernfalls ist nichts zu zeigen.

Sei $B(\Gamma \rightarrow \forall x \underline{F}[x]', f)$, dann folgt wegen der Variablenbedingung $\forall z(z \in \bar{\Gamma} \rightarrow B(\Gamma \rightarrow \underline{F}[a]', f \cup \{(a, z)\}))$.

Aus der Voraussetzung folgt

$$\forall z(z \in \bar{\Gamma} \rightarrow f \cup \{(a, z)\} \in f'(\Gamma \rightarrow \underline{F}[a]')),$$

also wiederum mit der Variablenbedingung:

$$\begin{aligned} \forall z(z \in \bar{\Gamma} \rightarrow f \upharpoonright \Gamma \in f' \upharpoonright \Gamma \rightarrow (f \cup \{(a, z)\} \upharpoonright F[a]) &\in f' \upharpoonright F[a]), \\ \Rightarrow f \upharpoonright \Gamma \in f' \upharpoonright \Gamma \rightarrow \forall z(z \in \bar{\Gamma} \rightarrow (f \cup \{(a, z)\} \upharpoonright F[a]) &\in f' \upharpoonright F[a]) \\ \Rightarrow f \in f'(\Gamma \rightarrow \forall x \underline{F}[x]'), &\text{ wenn man beachtet, da\ss man} \\ &\text{wegen des Substitutionslemmas noch } a = \min\{y \mid y \in V^{\tau}, y \notin V(F)\} \\ &\text{annehmen kann.} \end{aligned}$$

$$5.13 \quad \underline{\text{Val}(\underline{F}[t] \rightarrow \underline{C}') \wedge N(F, \tau, x) \wedge t \in E^{\tau} \rightarrow \text{Val}(\forall x \underline{F}[x] \rightarrow \underline{C}')}.$$

Beweis: Wiederum sei vorausgesetzt, daß t in $F[t]$ auftritt.

Sei $B(\forall x \underline{F}[x] \rightarrow \underline{C}', f)$ und $g \models f$ derart, daß

$$B(\underline{F}[t] \rightarrow \underline{C}', g) \text{ und } g \upharpoonright \forall x \underline{F}[x] \rightarrow \underline{C}' = f.$$

$$\Rightarrow g \in f'(\underline{F}[t] \rightarrow \underline{C}') \Rightarrow g \upharpoonright F[t] \in f' \upharpoonright F[t] \rightarrow f \upharpoonright C \in f' \upharpoonright C.$$

4.9 $\Rightarrow g \Vdash \bigcup \{ \langle a, (f't)'(g't) \rangle \} \in f'F[a] \rightarrow f'C \in f'C$
 für $a = \min\{y \mid y \in V^T, y \notin V(F[t])\}$.

Wegen $(f't)'(g't) \in \bar{V}^T$ folgt

$((f't)'(g't)) \in \bar{V}^T \rightarrow g \Vdash \bigcup \{ \langle a, (f't)'(g't) \rangle \} \in f'F[a] \rightarrow f'C \in f'C$,
 also $\forall z (z \in \bar{V}^T \rightarrow g \Vdash \bigcup \{ \langle a, z \rangle \} \in f'F[a] \rightarrow f'C \in f'C$,
 also $f \in f'(\forall x F[x] \rightarrow C)$ wegen $g \Vdash F = f \Vdash F$.

5.14 $\text{Val}(\ulcorner \Gamma \rightarrow F[t] \urcorner) \rightarrow \text{Val}(\ulcorner \Gamma \rightarrow \bigcup_{t \in \Lambda} F[x] \urcorner)$ und

$$\text{Val}(\ulcorner F[t] \rightarrow C \urcorner) \rightarrow \text{Val}(\ulcorner \bigcup_{t \in \Lambda} F[x] \rightarrow C \urcorner)$$

für $N(F, \tau, x)$, $t \in E^T$

ergeben sich unter 5.5 sofort aus 4.10.

5.15 $\text{Val}(\ulcorner \perp \rightarrow A \urcorner)$.

Beweis: Sei $B(\ulcorner \perp \rightarrow A \urcorner, f)$.

$f \Vdash \perp \in f' \perp \rightarrow \perp$, da $f' \perp = \emptyset$ nach 4.4,

$\perp \rightarrow f \Vdash A \in f' A$ nach dem Falsum-Axiom aus Z,

also $f \in f'(\ulcorner \perp \rightarrow A \urcorner)$.

5.16 $\text{Val}(\ulcorner \forall x (x=x) \urcorner)$, $\text{Val}(\ulcorner \forall x, y, z (x=y \rightarrow z=y \rightarrow x=z) \urcorner)$,
 $\text{Val}(\ulcorner \forall x, y (x=y \rightarrow Sx=Sy) \urcorner)$, $\text{Val}(\ulcorner \forall x, y (Sx=Sy \rightarrow x=y) \urcorner)$,
 $\text{Val}(\ulcorner \forall x (Sx=x \rightarrow \perp) \urcorner)$ mit $x, y, z \in W^0$

ergeben sich ohne Schwierigkeiten aus den Definitionen 4.3 und 4.4 und der Herleitbarkeit der Peano-Axiome in Z (nach 2.3.1).

Ich führe den Beweis für den letzten Fall als ein Beispiel aus.

Nach 2.3.1 gilt zunächst $\forall z (z \in \omega \rightarrow z+1 = z \rightarrow \perp)$.

Wegen $z \in \omega \Leftrightarrow z \in \bar{V}^0$ nach 4.1,

$B(a, \langle a, z \rangle)$ für $a \in V^0$, $z \in \bar{V}^0$ nach 4.2,

$z = (f'a)' \langle a, z \rangle$ und $z+1 = (f'Sa)' \langle a, z \rangle$ nach 4.3

folgt $\forall z (z \in \bar{V}^0 \rightarrow (f'Sa)' \langle a, z \rangle = (f'a)' \langle a, z \rangle \rightarrow \perp)$,

also $\forall z (z \in \bar{V}^0 \rightarrow \langle a, z \rangle \in f'(\ulcorner Sa=a \urcorner) \rightarrow \perp)$ nach 4.4,

also $\forall z (z \in \bar{V}^0 \rightarrow \emptyset \cup \{ \langle a, z \rangle \} \in f'(\ulcorner Sa=a \urcorner) \rightarrow \emptyset \in f' \perp)$

wegen $f' \perp = \emptyset$, also $\emptyset \in f' \perp \Leftrightarrow \perp$.

Weil nun $\forall f(B(\ulcorner \forall x(Sx=x \rightarrow 1) \urcorner, f) \rightarrow f=\emptyset)$ gilt,
folgt schließlich mit 4.4 die gewünschte Formel:
 $\forall f(B(\ulcorner \forall x(Sx=x \rightarrow 1) \urcorner, f) \rightarrow f \in f' \ulcorner \forall x(Sx=x \rightarrow 1) \urcorner')$.

$$5.17 \quad \frac{\text{Val}(F[0]) \wedge \text{Val}(\ulcorner \forall x(F[x] \rightarrow F[Sx]) \urcorner) \wedge h(x, o, x)}{\rightarrow \text{Val}(\ulcorner \forall x F[x] \urcorner')}.$$

Beweis: Sei $B(\ulcorner \forall x F[x] \urcorner, f)$ und $a \in V^0$,
dann erhält man über 4.3 mit Hilfe des Substitutions-
lemmas die beiden Formeln
 $f \cup \{ \langle a, \emptyset \rangle \} \in f' F[a]$ und
 $\forall z (z \in \tilde{I}'o \rightarrow f \cup \{ \langle a, z \rangle \} \in f' F[a] \rightarrow f \cup \{ \langle a, z+1 \rangle \} \in f' F[a])$
sodaß wegen $\tilde{I}'o = \omega$ durch vollständige Induktion in $\mathbb{Z}$
folgt $\forall z (z \in \tilde{I}'o \rightarrow f \cup \{ \langle a, z \rangle \} \in f' F[a])$,
d.h. $\text{Val}(\ulcorner \forall x F[x] \urcorner')$.

$$5.18 \quad \frac{\text{Val} \forall xyz (x=y \rightarrow x \varepsilon z \rightarrow y \varepsilon z)}{\text{Val} \forall xyz (\forall u (u \varepsilon x \leftrightarrow u \varepsilon y) \rightarrow x \varepsilon z \rightarrow y \varepsilon z)}$$

für $u \in W^{\tau}$, $x, y \in W^{(\tau)}$ und $z \in W^{((\tau))}$ erhält man mittels
4.4 S_3 resp. 4.11 aus dem Extensionalitätsaxiom von $\mathbb{Z}$.

5.19 Bemerkung: Dem hiermit abgeschlossenen Beweis
des Konsistenzsatzes hat ein Aufsatz als Vorbild ge-
dient, in dem T. Uesu das entsprechende Resultat für
die klassische Typentheorie und Zermelos Mengenlehre
erzielt. Von den Unterschieden, die sich in der vor-
liegenden Darstellung finden, möchte ich auf zwei
aufmerksam machen.

1) Die hier behandelte Typentheorie ist im Unterschied
zu Uesus System mit Hilfe von Abstraktionstermen auf-
gebaut und nötigt deshalb zu einer Modellierung, die
zusammengesetzten Termen von T entsprechend gebildete
Mengen aus dem Individuenbereich zuordnet. Für die
Definition dieser Zuordnung ist es dann entscheidend,
daß Formeln $F[t]$ und $\text{tax}F[x]$ durch dieselben Belegun-
gen erfüllt werden (vgl. Lemma 4.10).

2) Weniger wichtig ist der Gebrauch des Ersetzungsaxioms, wie es Myhill's System Z enthält. Es ist für die Beweisführung prinzipiell entbehrlich und durch das Aussonderungsschema zu ersetzen, erleichtert aber die Darstellung an einigen Stellen.

5.20 Zusatz über die klassische Typentheorie.

In Kap.I, §2 und 3 wurde der Nachweis geführt, daß die Konsistenz von T resp. $T_{(EA)}$ die Konsistenz des entsprechenden klassischen Systems bereits einschließt. Die dort geführten Beweise lassen sich ohne Schwierigkeit in Z formalisieren, indem man die induktive Definition der dabei verwendeten Formelübersetzungen in Z nachbildet, also die entsprechenden Abbildungen der Menge E mit den in §2 nachgewiesenen Mitteln von Z definiert. Die früher bewiesenen Aussagen über die Herleitbarkeit von Formeln der Typentheorie ergeben sich dann auf genau dieselbe Weise - also etwa $A \in H_C \rightarrow \bar{A} \in H$ anstelle von $\vdash_C A \Rightarrow \vdash \bar{A}$, wenn H_C der klassisch herleitbaren Formeln nach dem Muster Def. 3.10 gebildet ist. Zusammen mit dem Konsistenzsatz für T erhält man so insgesamt die Folgerung: $\text{Cons } T_C \wedge \text{Cons } T_C + (EA)$.

Dieses Ergebnis ist natürlich nicht direkt aus der im vorigen Paragraphen angegebenen Modellierung zu erhalten, weil diese die Formeln der Typentheorie in analoge Formeln der intuitionistischen Mengenlehre übersetzt und dafür dann den Beweis verlangt.

Z.B. würde $\text{Val}(' \neg \neg O \varepsilon a \rightarrow O \varepsilon a')$, $a \in V^{(0)}$, auf das Prinzip des indirekten Beweises für Z selbst führen. Denn belegt man a mit Mengen $y := \{x \in \omega \mid x = \emptyset \rightarrow \varphi\} \in \mathcal{T}'^{(0)}$, wobei φ für eine beliebige Formel von Z steht, so würde aus der behaupteten Gültigkeit folgen:

$$\neg\neg\emptyset \in y \rightarrow \emptyset \in y,$$

d.h. $\neg\neg(\emptyset = \emptyset \rightarrow \varphi) \rightarrow (\emptyset = \emptyset \rightarrow \varphi)$ nach Wahl von y ,

d.h. $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$.

Z müßte also klassisch sein.

Diese Überlegung verweist zurück auf die Untersuchung am Anfang dieses Kapitels. Denn ähnlich wie das dort angegebene Beispiel stellt auch die Menge y unter Beweis, daß die Forderung der Regularität auf das Tertium non datur (das kleinste Element von y wäre $\emptyset$ oder 1 , daher φ oder $\neg\varphi$), daher auf die klassische Mengenlehre führen würde.

Daß das Fundierungsaxiom intuitionistisch nicht zulässig ist, läßt sich, wie in beiden Beispielen geschehen, schon an dem Individuenbereich $\cup W \cap$ unserer Interpretation demonstrieren. Dieser Bereich enthält Mengen, die nicht beweisbar regulär sind - obwohl $\cup W \cap$ nach unserer Definition offensichtlich einen Teil der bekannten Konstruktion v. Neumann's bildet, mit der man klassisch ein System von fundierten Mengen erzeugt, und mit der sich über die ϵ -Induktion das Regularitätsaxiom nachweisen läßt.

LITERATUR

- A.S.Troelstra Metamathematical Investigation of Intuitionistic Arithmetic and Analysis, 1973
- H. Friedman Some Applications of Kleene's Methods for Intuitionistic Systems. Cambridge Summer School of Mathematical Logic, 1973
- J. Myhill Some Properties of Intuitionistic ZF-Set Theory, ebenda
- H. Osswald Ein syntaktischer Beweis für die Zulässigkeit der Schnittregel im Kalkül von Schütte für int. Typenlogik. Manuscripta mathem. 8, 1973
- T.T.Robinson Interpretations of Kleene's Metamathematical Predicate $\ulcorner \urcorner A$ in Intuitionistic arithmetic. J.S.L. 30, 1965
- T. Uesu On Zermelo's Set Theory and the Simple Type Theory with the Axiom of Infinity. Comm. math. Univ. St. Pauli, 15, 1970
- K. Schütte Grundlagen der Analysis im Rahmen einer einfachen Typenlogik. Vorlesungsnachschrift, München
- W. Pohlers Eine Formalisierung von Takahashi's Beweis für die einfache Typentheorie in Zermelos Mengenlehre. Diplomarbeit, München.

Lebenslauf:

Geburtsdatum: 15.6.48
Geburtsort: Wuppertal
Schulbildung: Volksschule und Gymnasium
in Wuppertal;
Reifeprüfung im Nov. 1966.
Studium: 1 Semester Chemie in Münster,
anschließend 1/2 Jahr Industrie-
praktikum.
Fortsetzung des Studiums mit Physik
in Münster, Vordiplom 1969.
Wechsel zur Universität München, WS 69.
dort dann Schwerpunktverlagerung
auf das Fach Mathematik.
Abschlußprüfung: Diplom 1973 in Mathematik;
Spezialgebiet Mathematische Logik
Berufl. Tätigkeit: Mathematikunterricht für Fachhoch-
schulreife.

